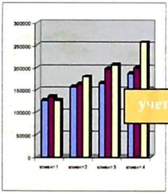
Маматурдиев Г.М., Турдубаев С.К., Камилов К.Т.

Высшее образование

ПРАКТИКУМ ПО ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ



Учебное пособие

Экономические специальности

Российский государственный социальный университет

Филиал в г.Ош

Маматурдиев Г.М., Турдубаев С.К., Камилов К.Т.

ПРАКТИКУМ ПО ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ

Экономические специальности

Ош-2008

УДК 336
ББК 65.9 (2) 26
М 22

Рекомендовано к печати Учебно-методическим советом
Кыргызско-Узбекского университета

Рецензент: Адхамов М.А., д-р экон. наук, профессор

М 22 Маматурдиев и др.
Практикум по финансовой математике
Экон.спец./ Г.М. Маматурдиев, С.К.Турдубаев,
К.Т.Камилов – Ош: ЦПУ КУУ, 2008 – 240 с.

ISBN 978-9967-438-00-2

В учебное пособие включены задачи по основным разделам финансовой математики: простые и сложные проценты, потоки платежей, финансовые ренты, кредитные расчеты, анализ инвестиционных проектов, оценки курсов и доходности ценных бумаг.

Вначале раздела даются основные понятия и формулы, примеры их применения для решения типовых задач.

Практикум предназначен для студентов и преподавателей экономических вузов, а также для широкого круга специалистов, применяющих финансовую аналитику в своей практической деятельности.

М 060501204-08

УДК 336
ББК 65.9 (2) 26

ISBN 978-9967-438-00-2

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие содержит систематизацию основных понятий и методов финансовых вычислений и количественного анализа финансовых операций. Оно предназначено для проведения следующих финансовых расчетов:

- простые и сложные проценты при использовании процентных и учетных ставок;
- вкладов и кредитов с учетом дисконтирования и инфляции;
- по изменению размеров и сроков платежей;
- вариантов погашения кредитов;
- по оценке рыночной стоимости облигаций, при оценке акции;
- эффективная ставка процентов;
- определение срока ссуды и величины процентной ставки;
- потоки платежей и финансовые расчеты и т.д.

В данном практикуме рассматриваются: проценты, система процентных ставок, наращение процентов, дисконтирование платежей.

Кроме этого, рассматриваются вопросы, относящиеся к количественному анализу разнообразных потоков платежей и, в частности, финансовых рент. С потоками платежей в практике встречаются каждый раз, когда по условиям операции платежи распределены во времени. Без знания количественных соотношений между показателями, характеризующими потоки платежей, нельзя понять механизм любой долгосрочной финансовой операции.

В первых двух главах настоящего пособия рассмотрены основные понятия финансового количественного анализа, приведены параметры финансовых вычислений – проценты, система процентных ставок, дисконтирование платежей, финансовая эквивалентность платежей, влияние инфляционных процессов, консолидация платежей, аннуитеты, показана их взаимосвязь.

В остальных главах рассматриваются методы погашения долгов, ипотечное кредитование, операции с ценными бумагами.

Содержится большое количество примеров и задач, задания и тестовые материалы.

Переход к финансовой устойчивости и конкурентноспособности любой фирмы могут быть достигнуты только при эффективном управлении ее финансовыми ресурсами. Для того, чтобы правильно решать эти вопросы, необходимо овладеть не только технологией управления финансами, но и современными методами проведения финансово-экономических операций, связанных с расчетом процентных начислений.

Пособие представляет интерес не только для студентов экономических вузов, но и специалистов – сотрудников банков, инвестиционных компаний и др.

Глава I. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ПРОЦЕНТОВ

1.1. Простые проценты

1.1.1. Определение простых процентов

Пусть P – сумма капитала, предоставляемого в кредит. Процентная ставка установлена в размере $i = \frac{I_r}{P}$, где I_r - сумма процентов за год. За единичный период начисления ($T=1$) и процентной ставки i, в конце года будущих сумм S по начальному вкладу P, определяется формулой:

$$S = P + \frac{P}{100} \cdot i.$$

Если ставка i измеряется десятичной дробью, то

$$S_i = P + P \cdot i = P(1 + i)$$

Для простых процентов доход за n лет:

$$I = I_r \cdot n = P \cdot i \cdot n$$

Тогда наращение основной суммы S определяется формулой

$$S_i = P + I = P + Pin = P(1 + in) \qquad (1.1.1.1)$$

Если финансовая сделка не равна целому числу лет, а период начисления равен отношению числа дней функционирования сделки к числу дней в году K, т.е.

$$n = \frac{Д}{K}$$

Тогда формула наращенной суммы примет вид:

$$S_i = P \cdot (1 + i \cdot \frac{Д}{K}) \qquad (1.1.1.2)$$

На практике применяются три варианта расчета процентов с использованием K.

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды (*английская практика*). Продолжительность года (*временная база*) равна 365 (366) дням. Точное число дней ссуды определяется путем подсчета числа дней ссуды и датой ее погашения (*для не високосного года $K=365$, а для високосного года $K=366$*).

2. Обыкновенные (*коммерческие*) проценты с точным числом дней ссуды (*французская практика*). Величина $Д$ рассчитывается как в предыдущем случае, а временная база принимается *$K=360$ дней.*

3. Обыкновенные проценты с приближенным дней ссуды (*германская практика*). В этом случае в качестве K берем 360 дней. 360 делим на 12 поэтому количество дней в каждом месяце берем 30.

При точном и приближенном методах начисления процентов день выдачи и день погашения ссуды принимают за один день.

Пример 1. Банк выдал кредит 100 тысяч сом 15 января. Срок возврата кредита – 12 ноября. Процентная ставка установлена в размере 10% годовых. Год не високосный. Определить сумму, подлежащую возврату.

Решение:

Наращенную сумму S, подсчитаем тремя методами:

1. 12 ноября – 316 дней

   15 января – 15 дней

Точное число дней $Д=316\text{-}15=301$ *день*

Тогда $S = 100 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot \frac{301}{365}) \approx 108{,}247$ *тысяч сом*

2. По формуле обыкновенных процентов с точным числом дней ссуды:

$$S = 100 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot \frac{301}{365}) = 108{,}361 \text{ тысяч сом}$$

3. По формуле обыкновенных процентов с приближенным числом дней ссуды: *январь – 16 дней, февраль, март, апрель, май,*

июнь, июль, август, сентябрь, октябрь – 30x9=270 дней, ноябрь – 12 дней.

Тогда: *Д=16+270+12-1=297 дней;*

$$S = 100 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot \frac{297}{365}) \approx 108{,}25 \text{ тысяч сом}$$

Если на различных интервалах времени начисления процентов применяются различные простые процентные ставки, тогда наращенная сумма на конец срока определяется следующим образом:

$$S = P \cdot (1 + i_1 n_1 + i_2 n_2 + \ldots + i_m n_m) = P \cdot (1 + \sum_{t=1}^{m} i_t \cdot n_t) \qquad (1.1.1.3)$$

где i_t - ставка простых процентов в периоде t $(t = \overline{1,m})$

n_t - продолжительность периода

$$n = \sum_{t=1}^{m} n_t$$

Пример 2. Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первый год – ставка 10%, в каждом последующем полугодовая ставка повышается на 1%. Необходимо определить коэффициент наращения за три года.

Решение:

$$K_H = 1 + \sum_{t=1}^{m} i_t \cdot n_t = 1 + 0{,}1 \cdot 1 + 0{,}11 \cdot 0{,}5 + 0{,}12 \cdot 0{,}5 + 0{,}13 \cdot 0{,}5 + 0{,}14 \cdot 0{,}5 = 1{,}1 + 0{,}055 + 0{,}06 +$$
$$+ 0{,}065 + 0{,}07 = 1{,}35$$

Обычно к наращению по простым процентам прибегают при выдаче краткосрочных ссуд (*на срок до одного года*) или в случае, когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются кредитору.

В практике при инвестировании средств в краткосрочные депозиты иногда прибегают неоднократному последовательному повторению наращения по простым процентам в пределах заданного общего срока. Фактически это означает реинвестирование средств, полученных на каждом этапе наращения с помощью постоянной или переменной ставок. В этом случае наращенная сумма определяется по формуле:

$$S = P \cdot (1 + i_1 n_1 + i_2 n_2 + \ldots + i_m n_m) = P \cdot (1 + \prod_{k=1}^{m} (1 + i_k n_k) \qquad (1.1.1.4)$$

Если промежуточные сроки начисления и ставки не изменяются, то формула (1.1.4) представляется в виде:

$$S = P \cdot (1 + i \cdot n)^m \qquad (1.1.1.5)$$

Пример 3: 50 тысяч сом положены 1 марта на месячный депозит под 14% годовых. Какова наращенная сумма, если операция повторяется три раза?

Решение:

Если начислять точные проценты (365/365), то

$$S = 50 \cdot (1 + 0{,}14 \cdot \frac{31}{365})(1 + 0{,}14 \cdot \frac{28}{365})(1 + 0{,}14 \cdot \frac{31}{365}) = 50 \cdot (1 + 0{,}012) \cdot (1 + 0{,}014) \cdot (1 + 0{,}012) =$$
$$= 50 \cdot 1{,}012 \cdot 1{,}014 \cdot 1{,}012 = 50 \cdot 1{,}038 = 51{,}9 \textit{ тысяч сом}$$

Начисление обыкновенных процентов (*германская практика*), наращенная сумма

$$S = 50 \cdot (1 + 0{,}14 \cdot \frac{30}{365})^3 = 50 \cdot 1{,}024 = 51{,}207 \textit{ тысяч сом}$$

1.1.2. Наращение процентов в потребительском кредите

Простые проценты можно представить в потребительском кредите. В потребительском кредите проценты начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу уже в момент открытия кредита.

Наращенная сумма долга определяется формулой:

$$S = P \cdot (1 + ni)$$

где i – ставка наращения процентов

n – срок кредита в годах

$I = P \cdot ni$ - начисленные за весь срок проценты

P – первоначальная сумма долга

Величина разового погасительного платежа составит

$$q = \frac{S}{n \cdot m} \qquad (1.1.2.1)$$

где n – срок кредита в годах
m – число платежей в году
q – означает ежемесячные платежи

Здесь проценты начисляются на первоначальную сумму долга.

Пример 1: Кредит на покупку товара на сумму 200 тысяч сомов открыт на три года, процентная ставка – 15% годовых, выплаты в конце каждого месяца. Определите сумму долга с процентами и ежемесячные платежи.

Решение:
Сумму долга с процентами определим по формуле

$$S = 200 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}15) = 200 \cdot 1{,}45 = 290 \text{ тысяч сом}$$

Ежемесячные платежи: $q = \frac{290}{3 \cdot 12} = \frac{290}{36} \approx 8{,}056$ *тысяч сом.*

Необходимость в таком разбиении возникает при досрочном погашении задолженности.

1.1.3. Простые учетные ставки

Простая учетная ставка – это антисипативный способ начисления процентов. это означает, что проценты начисляются в начале расчетного периода, при этом за базу (100%) принимается сумма погашения долга.

Введем следующие обозначения:

$d\%$ - простая годовая учетная ставка;
d - относительная величина этой ставки;

$D_г$ - сумма процентных денег за год;
D - сумма процентных денег за период, равный n (т.е. за n - срок кредита в годах).

Тогда простая учетная ставка:

$$d\% = \frac{D_г}{S} \cdot 100\% \quad \text{или} \quad d = \frac{D_г}{S}$$

где S – наращенная сумма.

Отсюда $D_г = d \cdot S$, получаем сумму процентных денег за год. Тогда сумма процентных денег за n периодов будет равной:

$$D = D_г \cdot n = S \cdot d \cdot n,$$

Но $S = P + D$, поэтому

$$S = P + S \cdot d \cdot n \Rightarrow S - S \cdot d \cdot n = P \Rightarrow P = S \cdot (1 - d \cdot n) \Rightarrow S = \frac{P}{1 - d \cdot n} \qquad (1.1.3.1)$$

Это и является основной формулой для простых антисипативных процентов, а $\frac{1}{1 - d \cdot n}$ - называется коэффициентом наращения.

В качестве n берем $n = \frac{\partial}{K}$,

где ∂ - количество дней;
K - количество дней в году.

Тогда наращенную сумму S можно представить формулой:

$$S = \frac{P}{1 - d \cdot \frac{\partial}{K}} \qquad (1.1.3.2)$$

Зная наращенную сумму S, а также относительную величину ставки d и срок n, можно определить первоначальную сумму P:

$$P = S \cdot (1 - dn) \qquad (1.1.3.3)$$

Пример. Через 210 дней после подписания договора должник уплатил 380 сом. Кредит выдан под 18% годовых. Какова первоначальная сумма долга при условии, что при начислении процентов используется простая учетная ставка и временная база $K = 360$ дней?

Решение:

Первоначальная сумма долга – это величина P:

$$P = 380 \cdot \left(1 - 0{,}18 \cdot \frac{210}{360}\right) = 340{,}1 \text{ тыс. сом}$$

1.1.4. Вложение денег в банк под проценты

Вложение денег в банк под проценты может быть одноразовым и многоразовым.

Расчетная формула для одноразовых вложений денег в банк определяется формулой:

$$S_n = P \cdot (1 + \frac{i_n}{100} \cdot n) \qquad (1.1.4.1)$$

Пример 1. Клиент сделал вклад в банк в сумме 250 тысяч сом под 50% годовых сроком на 10 лет. Какая сумма денег будет в банке через 10 лет?

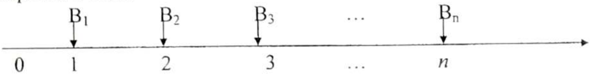
Решение:

Вычисление осуществляем с помощью формулы (1.1.4.1):

$$S_{10} = 250 \cdot (1 + \frac{50}{100} \cdot 10) = 1500 \text{ тыс. сом}$$

Теперь рассмотрим, когда вложение денег в банк будет многоразовым. Если денежный поток (вклады) формируется из равных поступлений через равные промежутки времени, то он называется **аннуитет.**

Пусть вклады вносятся в конце каждого года. Эти вклады изобразим в виде:



время

Общая формула для S_n определения суммы денег, которая будет накоплена в банке через n лет (в конце n-го года) при условии, что величина i_n остается неизменной. Число вкладов достигнет n. Формула имеет вид:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} B_k \cdot [1 + i_n / 100 \cdot (n-k)] \qquad (1.1.4.2)$$

где k – текущее число лет.

Если все вклады по величине равны, т.е. $B_1 = B_2 = \ldots = B_n = B$ (аннуитет поснумерандо), то формула (1.1.4.2) принимает упрощенный вид:

$$S_n = B_k \cdot \left[1 + i_n / 100 \cdot \sum_{k=1}^{n} (n-k)\right] \qquad (1.1.4.3)$$

Нетрудно убедиться, что $\sum_{k=1}^{n} (n-k) = n \cdot (n-1)/2$

Поэтому формула (1.1.4.3) примет вид:

$$S_n = B \cdot n \cdot [1 + i_n / 100 \cdot (n-1)/2] \qquad (1.1.4.4)$$

Пример 2. Клиент сделал вклад в банк в сумме 250 тыс. сом под 50% годовых сроком на 4 года. Требуется найти S_4.

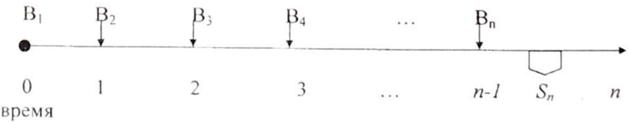
$$S_4 = 250 \cdot (1 + \frac{50}{100} \cdot 3) + 250 \cdot (1 + \frac{50}{100} \cdot 2) + 250 \cdot (1 + \frac{50}{100} \cdot 1) + 250 = 250(\frac{5}{2} + 2 + \frac{3}{2} + 1) = 250 \cdot 7 =$$
$$= 1750 \text{ тыс. сом}$$

Теперь будем решать с помощью общей формулы (1.1.4.4):

$$S_4 = 250 \cdot 4 \cdot \left[1 + \frac{50}{100} \cdot (4-1)/2\right] = 1000 \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right] = 1000 \cdot 1{,}75 = 1750 \text{ тыс. сом}$$

Отсюда видно, что в обеих методах решение примера приводит к одинаковому результату.

Если вклады делаются в начале каждого года, то эту ситуация графически представляется в виде:



В этом случае, общая формула для определения суммы вкладов через n лет на конец n-го года, имеет вид:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} B_k \cdot \left[1 + i_n / 100 \cdot (n + 1 - k)\right] \qquad (1.1.4.5)$$

Если же, все вклады одинаковы, т.е. $B_1=B_2=\ldots=B_n=B$ (аннуитет пренумерандо), то формула (1.1.4.5) примет следующий вид:

$$S_n = B \cdot (n + i_n)/100 \cdot \sum_{k=1}^{n} k \qquad (1.1.4.6)$$

Но $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$, поэтому для данной ситуации

$$S_n = B \cdot n\left[1 + i_n / 100 \cdot (n+1)/2\right] \qquad (1.1.4.7)$$

<u>Пример 3.</u> Пусть *B=250 тыс. сом; i_n=50%$ n=4 года.* Чему равна S_4?

<u>Решение:</u>

Решим сначала этот пример с помощью формулы (1.1.4.6):

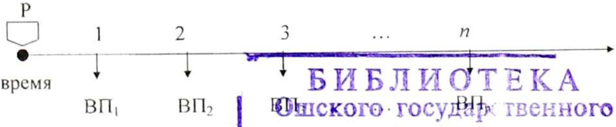
$$S_4 = 250 \cdot (1 + \frac{50}{100} \cdot 4) + 250 \cdot (1 + \frac{50}{100} \cdot 3) + 250 \cdot (1 + \frac{50}{100} \cdot 2) + 250 \cdot (1 + \frac{50}{100} \cdot 1) =$$
$$= 250 \cdot (3 + 250 \cdot 2{,}5 + 250 \cdot 2 + 250 \cdot 1{,}5) = 250 \cdot (3 + 2{,}5 + 2 + 1{,}5) = 250 \cdot 9 = 2250 \textit{ тыс.сом}$$

Теперь вычислим значение S_4 с помощью формулы (1.1.4.7):

$$S_4 = 250 \cdot 4 \cdot \left(1 + \frac{50}{100} \cdot \frac{5}{2}\right) = 1000 \cdot 2{,}25 = 2250 \textit{ тыс.сом}$$

Результаты S_n полученные с помощью формул (1.1.4.6) и (1.1.4.7) одинаковы.

Теперь рассмотрим задачи определения суммы первоначального вклада p, которые могут обеспечить клиенту определенные ежегодные выплаты (ВП) в течение *n-лет.* Эту задачу графически представим в виде:



В этом случае P определяется формулой:

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{ВП_k}{(1 + \frac{i_n}{100} \cdot k)} \qquad (1.1.4.8)$$

Если же, выплаты будут одинаковы, т.е. $ВП_1 = ВП_2 = \ldots = ВП_к = ВП$, то формула (1.1.4.8) примет следующий вид:

$$P = ВП \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1 + \frac{i_n}{100} \cdot k)} \qquad (1.1.4.9)$$

Пример. Если *ВП=250 тыс. сом; i_n=50%; n=4 года, то чему равен первоначальный вклад P.*

Решение:

Решение осуществляем с помощью формулы (1.1.4.9):

$$P = 250 \cdot \left[\frac{1}{1 + \frac{50}{100} \cdot 1} + \frac{1}{1 + \frac{50}{100} \cdot 2} + \frac{1}{1 + \frac{50}{100} \cdot 3} + \frac{1}{1 + \frac{50}{100} \cdot 4} \right] = 250 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) =$$

$$= 250 \cdot 1{,}9 = 475 \text{ тыс. сом}$$

1.1.5. Определение срока суды и величины процентной ставки (простые проценты)

Рассмотрим сначала вопросы определение срока ссуды. Для расчета продолжительности ссуды в годах и днях, возьмем известные нам формулы:

$$S = P \cdot (1 + n \cdot i) \qquad (1.1.5.1)$$

$$S = \frac{P}{1 - nd} \qquad (1.1.5.2)$$

Из этих уравнений определим n

$$npi = S - P \Rightarrow n = \frac{S - P}{Pi} = \frac{\frac{S}{P} - 1}{i} \qquad (1.1.5.3)$$

$$S - Snd = P \Longrightarrow S - P = S \cdot nd \Rightarrow n = \frac{1 - \frac{P}{S}}{d} \qquad (1.1.5.4)$$

Срок в днях

Известно, что $n = \frac{t}{K}$, где K - временная база.

Из

$$(1.1.5.3) \Rightarrow t = \frac{S-P}{Pi} \cdot K \qquad (1.1.5.5)$$

$$\text{Из } (1.1.5.4) \Rightarrow t = \frac{S-P}{Sd} \cdot K \qquad (1.1.5.6)$$

Пример 1. Какова должна быть продолжительность ссуды в днях для того, чтобы долг, равный 150 тыс. сом, вырос до 200 тыс. сом при условии, что начисляются простые проценты по ставке 18% годовых (АСТ/АСТ).

Решение: По формуле (1.1.5.5) имеем:

$$t = \frac{S-P}{Pi} \cdot K = \frac{200-150}{150 \cdot 0{,}18} \cdot 365 = \frac{18250}{27} \approx 675{,}9 = 676 \text{ дней}$$

Если простые проценты считаем по ставке 25%, тогда

$$t = \frac{200-150}{150 \cdot 0{,}25} \cdot 365 = \frac{18250}{375} \approx 486{,}7 = 487 \text{ дней.}$$

Величина процентной ставки

Решив уравнения

$$S = P \cdot (1 + ni) \qquad (1.1.5.7)$$

$$P = S \cdot (1 - nd) \qquad (1.1.5.8)$$

определим i и d, тогда искомые формулы для сроков, измеренных в годах и днях, имеют вид:

$$i = \frac{S-P}{Pn} = \frac{S-P}{Pt} \cdot K \qquad (1.1.5.9)$$

$$d=\frac{S-P}{Sn}=\frac{S-P}{St}\cdot K \qquad (1.1.5.10)$$

Пример 2. В контракте предусматривается погашение обязательства в сумме 120 тыс. сом через 100 дней. При первоначальной сумме долга 95 тыс.сом ($ACT/360$).

Определить доходность операции для кредитора в виде ставки процента и учетной ставки.

Решение. На основании формул (1.1.5.9) и (1.1.5.10), имеем:

$$i=\frac{120-95}{95\times100}\cdot360=\frac{1}{380}\cdot360=\frac{12}{19}\approx0{,}632 \text{ или } 63{,}2\%.$$

$$d=\frac{120-95}{120\times100}\cdot360=\frac{25}{1200}\cdot36=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}=0{,}75 \text{ или } 75\%.$$

Иногда размер дисконта фиксируется в договоре в виде процента скидка
(общей учетной ставки) d' за весь срок ссуды.
В этом случае $P=S(1-d')$. Но

$$P=\frac{S}{1+ni},$$

отсюда

$$\frac{1}{1+ni}=\frac{1-d'}{1}\Rightarrow 1=(1-d')(1+ni)=(1-d')+(1-d')ni\,,d'\Rightarrow$$

$$i=\frac{d'}{n(1-d')} \qquad (1.1.5.11)$$

Годовую учетную ставку определим в виде:

$$d=\frac{d'}{n} \qquad (1.1.5.12)$$

Пример 3. Стороны договорились о том, что из суммы ссуды, выданной на 240 дней, удерживается дисконт в размере 16%.

Определить цену кредита в виде годовой ставки простых процентов и учетной ставки ($K=360$).

Решение:

По условию $n = \frac{240}{360} = \frac{2}{3}$; $d' = 0{,}16$. Тогда согласно формулам (1.1.5.11) и (1.1.5.12), имеем:

$$i = \frac{0{,}16}{(1-0{,}16)\frac{2}{3}} = \frac{0{,}48}{1{,}68} = 0{,}286 \text{ или } (28{,}6\%)$$

$$d = \frac{0{,}16}{2\ 3} = \frac{0{,}48}{2} = 0{,}24 \qquad \text{или } (24\%).$$

Упражнения

1. Через 180 дней после подписания договора должник уплатил 310 сом. Кредит выдан под 16% годовых. Какова первоначальная сумма долга при условии, что при начислении процентов используется простая учетная ставка и временная база K=360 дней?

2. Какую прибыль получит банк в результате учета 20 мая трех векселей по 30000 сом каждый, если срок оплаты первого векселя 10 сентября, а двух других – 1 октября того же года и учетная ставка этого банка равна 10%.

3. Клиент учел 1 февраля 2005 года вексель на сумму 60000 сом, срок которого 1 июня того же года, и получил 58050 сом. Какова учетная ставка банка?

4. Тратта (переводной вексель) выдана на 15000 сом с уплатой 15 октября того же года. Владелец векселя учел его в банке 15 августа по учетной ставке 10%. Какую сумму он получил? Какую сумму он получит, если срок уплаты по векселю 15 октября следующего года? Примечание: воспользоваться формулой $P = S \cdot (1 - t \cdot d)$ где t – число лет, остающееся с момента учета векселя до срока уплаты, $d\%$ - учетная ставка, установленная банком.

5. Сберегательный сертификат номиналом 15 тыс. сом выдан на 120 дней с погашением в сумме 18 тыс. сом.

Определить:
1) учетную ставку;
2) процентную ставку.
За временную базу принять 360 дней.

6. По сберегательному сертификату, выданному на 210 дней, начисляется дисконт в размере 12% от суммы погашения. Год – не високосный.
Определить:
1) учетную ставку;
2) процентную ставку.
7. Определите сумму, причитающуюся в качестве процентов по кредиту и сумму, причитающуюся к возврату, если сумма кредита составляет 320 000 сомов. Срок -1.5 года при ставке простых процентов, равной 12% годовых.
8. Фирма получила кредит в сумме 1 200 000 сом на срок с 1 января по 10 марта под простые проценты с процентной ставкой 10% годовых. Определить коэффициент наращения и наращенную сумму.
9. Ссуда в размере 125 000 сомов выдана на полгода по простой ставке процентов 20% годовых. Определить наращенную сумму.
10. Определить период начисления, за который первоначальный капитал в размере 225 000 сом достигает 235 000 сом, если используется простая ставка процентов 12% годовых.
11. Определить простую ставку процентов, при которой первоначальный капитал в размере 125 000 сом достигнет 140 000 сом через 180 дней, k=360 дней.
12. Кредит выдан под простую ставку 12% годовых на 300 дней. Рассчитать сумму, получаемую кредиторами. И сумму процентных денег, если величина кредита составляет 130 000 сом.
13. Определить доходность операции для кредитора, если им предоставлена ссуда в размере 380 000 сом на 10 дней и договор предусматривает сумму погашения долга 420 000 сом. Доходность выразить в виде простой ставки процентов I и учетной ставки d. Временную базу принять равной k=360 дней.

14. Кредит выдается на полгода по простой учетной ставке 10% годовых. Рассчитать сумму, получаемую заемщиком, и величину дисконта, если требуется возвратить 350 000 сом.
15. Кредит в размере 200 00сом выдается по учетной ставке 14% годовых. Определить срок, на который предоставляется кредит, если заемщик желает получить 145 000 сом.
16. Рассчитать учетную ставку, которая обеспечивает доход в 85 000 сом, если сумма в 70 000 сом выдается в ссуду на полгода.
17. Сбербанк выплачивает по переменным вкладам 17% годовых (простых). Какая сумма будет через год на счету пенсионера, положившего на сберкнижку 3650 сом?
18. Банк выплачивает в простых процентах в год. Господин Б.Ахмедов хочет получить через 2 года и 6 месяцев 25000 сом на подарок к 18-летию. Какую сумму он должен положить в банк в настоящий момент?
19. Найти проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 800 тыс. сом, срок 4 года, проценты простые по ставке 20% годовых ($i=0,2$).
20. Кредит для покупки товара на сумму 350 тыс. сом открыт на 5 лет, процентная ставка 12% годовых, выплаты в конце каждого месяца. Определить сумму долга с процентами и ежемесячные платежи.
21. Банк выдал кредит 40 тыс. сом 15 марта. Срок возврата кредита – 12 октября. Процентная ставка устанавливается в размере 12% годовых. Год невисокосный. Определить сумму подлежащую возврату.
22. На какой срок должен быть выпущен сберегательный сертификат номиналом 10 тыс. сом, если сумма погашения при 8% годовых составляет 10,5 тыс. сом. Год невисокосный.
23. В ходе судебного заседания выяснилось, что господин Иванов А.П. недоплачивал налогов 250 сом ежемесячно. Налоговая инспекция хочет взыскать недоплаченные за последние два года налоги вместе с процентами (3% ежемесячно). Какую сумму заплатит Иванов А.П.?
24. Господин Акматов С.К. в прошлом году получил заработную плату в размере 240000 сом, продал автомобиль

за 120000 сом, получил дивидендов от акций, которыми он владеет на сумму 80000 сом. Какой налог должен заплатить господин Акматов С.К. за прошлый год, если сумма полученная за проданный автомобиль, также является доходом?

25. Господин Юсупов имел в прошлом году следующие доходы:
    - 138000 сом он получил в качестве зарплаты;
    - владея пакетом акций и облигаций, он получил 121000 сом дивидендов с акций и 12000 сом процентного дохода с облигаций.

    Кроме того господин Юсупов А.Ш. продал часть своих акций за 125000 сом. Так как на покупку этих акций в свое время было потрачено 55000 сом, доход от продажи равен 65000 сом. Какую сумму налога должен заплатить господин Юсупов А.Ш. за прошлый год?
26. Валовая выручка американской корпорации за год составила \$800000, производственные расходы корпорации равны \$180000. корпорация заняла в банке \$300000 под 5% годовых. Амортизация оборудования равна \$22000. вычислить сумму налогов, которую должна заплатить корпорация.
27. Фирма по продаже обуви в г. Бишкеке в течение года закупила обувь на сумму 120000 сом, взяв эти деньги в кредит в банке под 10% годовых. Расходы на доставку обуви и организацию торговли в розницу составили 22% стоимости обуви. Вся обувь была продана за 190000 сом. Вычислить сумму налога, которую должна заплатить фирма.
28. Вклад в сумме 12500 сом был положен в банк 12 мая по ставке 12% годовых и 15 июля вклад был востребован. Определить сумму начисленных процентов при германской практике их вычисления.
29. Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первый год – ставка 10%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Требуется определить коэффициент наращения на 5 лет.
30. Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первый год – ставка 8%, в каждом

последующем полугодии ставка повышается на 2%. Определить коэффициент наращения за 2,5 года.

1.2. Дисконтирование по простым процентным ставкам

1.2.1.Сущность дисконтирования

Ставится задача: *по заданной сумме* S*, которую следует уплатить через некоторое время* n*, требуется определить сумму полученной ссуды* P. Эта задача является обратной по отношению к определению наращенной суммы.

Расчет P по S осуществляется при выдаче кредита, ссуды. В этом случае, мы говорим, что сумма S дисконтируется, сам процесс начисления процентов и их удержание называют учетом , а удержанные проценты – *дисконтом* или *скидкой.*

Таким образом, процесс дисконтирования является обратным процессом по отношению к процессу начисления процентов.

Дисконтированием называется авансовое удержание с заемщика процентов в момент выдачи ссуды, т.е. до наступления срока его погашения.

Другим вариантом дисконтирования является учет векселей в банке, когда банк, принимая вексель от предъявителя, выдает ему обозначенную на векселе сумму до срока его погашения.

Банк удерживает в свою пользу проценты (*дисконт*) от суммы векселя за время, оставшееся до срока погашения. Подобным способом (*с дисконтом*) государство продает большинство своих ценных бумаг (*долговых обязательств*).

В процессе дисконтирования в качестве исходной величины берем не P, а некоторую будущую сумму S. Требуется определить начальный вклад.

Из формулы $S = P\cdot(1+ni)$

определим
$$P=\frac{S}{1+n\cdot i} \qquad (1.2.1.1)$$

Здесь $n=\frac{t}{k}$ - срок ссуды в годах.

Величину P, определим с помощью дисконтирования, назовем современной стоимостью или современной величиной будущего платежа S.

В зависимости от вида процентной ставки применяются два метода дисконтирования:

- Математическое дисконтирование;
- Банковский (коммерческий) учет.

Когда применяют математическое дисконтирование используют ставку наращения, а при банковском учете – учетную ставку.

1.2.2.Математическое дисконтирование

В математическом дисконтировании рассматриваются задачи обратные наращению первоначальной суммы ссуды.

Здесь ставится задача в виде: какую первоначальную сумму ссуды надо выдать в долг, чтобы получить в конце срока сумму S, при условии, что на долг начисляются проценты по ставке i.

Если известно S, то P определяется формулой (1.2.1.1), где

$n = \frac{t}{K}$ - срок ссуды в годах

$\frac{1}{1+n\cdot i}$ - называют дисконтом или дисконтирующим множителем.

Разность $S-P$ является дисконтом суммы S: $D = S - P$

Она показывает какую долю составляет первоначальная величина долга в окончательной его сумме.

Пример 1. Через 136 дней после подписания договора должник уплатил 240 тыс. сом. Кредит выдан под 18% годовых.

Какова первоначальная сумма долга при условии, что временная база равна 365 дням?

Решение:

По условии задачи $S = 240$ тыс.сом., $n = \frac{t}{K} = \frac{136}{365}$, $i = 18\%$.

Тогда

$$P=\frac{S}{1+n\cdot i}=\frac{240000}{1+\frac{136}{365}\cdot 0{,}18}\approx\frac{240000}{1{,}067}\approx 222118{,}1\ сом.$$

1.2.3. Банковский учет (учет векселей)

Банк или другое финансовое учреждение до наступления срока платежа по векселю или другому платежному обязательству приобретает его у владельца по цене, которая меньше суммы, указанной на векселе, т.е. покупает (*учитывает*) его с дисконтом. Получив при поступлении срока векселя деньги банк реализует процентный доход в виде дисконта.

В свою очередь владелец векселя с помощью его учета имеет возможность получить деньги хотя и не в полном объеме, однако ранее указанного на нем срока.

При учете векселя применяется банковский или коммерческий учет. Согласно этому методу проценты за использование ссуды в виде дисконта начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока. При этом применяется учетная ставка d. Размер дисконта, или сумма учета равна $S\cdot n\cdot d$, где S – наращенная сумма, d - годовая учетная ставка, n – срок ссуды в годах. Тогда первоначальная сумма долга будет

$$P=S-Snd=S\cdot(1-n\cdot d) \qquad (1.2.3.1)$$

где n – срок от момента учета до даты погашения векселя.

Здесь $1-nd$ является дисконтным множителем.

Если $n>\frac{1}{d}$, то сумма P будет отрицательной. Отсюда следует, что при большом сроке векселя учет может привести к нулевой или даже отрицательной сумме P, а это в свою очередь означает, что смысла нет.

Например, при *d=20%* уже пятилетний срок достаточен для того, чтобы владелец векселя не получил при его учете.

Учет посредством учетной ставки чаще всего осуществляется при временной базе *K*=360 дней, число дней ссуды обычно берется точным АСТ/360.

Пример. Тратта (переводной вексель) выдана на сумму 200 тыс.сом. с уплатой 17.11. Владелец документа учел его в банк 18.09 по учетной ставке 12%.

Определить дисконт и годовую доходность операции учета по простой ставке для банка $i=?$

Решение:

Найдем

$$P = 200000 \cdot \left(1 - \frac{60}{360} \cdot 0{,}12\right) = 200000 \cdot (1 - 0{,}02) = 200000 \cdot 0{,}98 = 196000 \, сом$$

Дисконт $D = 200000 - 196000 = 4000 \, сом$

Подсчитаем годовую доходность операции учета по простой ставке для банка:

$$i = \frac{4000 \cdot 360 \cdot 100}{196000 \cdot 60} = \frac{14400}{1176} = 12{,}24\% .$$

Подсчитаем годовую доходность операции учета по простой ставке для банка

$$i = \frac{(S-P) \cdot K}{Pt} = \frac{4000 \cdot 360}{196000 \cdot 60} \cdot 100 = \frac{14400}{1176} = 12{,}24\%$$

В случае $i=12{,}24\%$ решим две задачи:

1. Определить наращенную сумму долга и сумму, получаемую при учете.

Оба последовательных действия можно представить в одной формуле:

$$P'' = P \cdot (1 + n \cdot i)(1 - n'd) \qquad (2.3.2)$$

где n - общий срок обязательства

n' - срок от момента учета до погашения.

Пусть в данном примере $n = \frac{120}{360}$, тогда

$$P'' = 200000 \cdot \left(1 + \frac{120}{360} \cdot 0{,}1224\right)\left(1 - \frac{60}{360} \cdot 0{,}12\right) == 200000 \cdot (1 + 0{,}0408)(1 - 0{,}02) =$$

$$= 200000 \cdot 1{,}0408 \cdot 0{,}98 = 203996{,}8 \, сом$$

Упражнения

1. Вексель выданный на 180 дней, с обязательством уплатить 75 тыс. сом учитывая по ставке 8%. Определить приведенную наращенную сумму и размер дисконта при математическом дисконтировании.
2. Вексель на 150 тыс. сом с обязательством уплатить через 120 дней с 10 простыми процентами годовых учтен банком за 40 дней до наступления срока платежей по учетной ставке 8%. Определить сумму, полученную векселедержателем, и размер дисконта в пользу банка.
3. Переводной вексель выдан на сумму 150 тыс. сом с уплатой 12 декабря. Владелец учел его в банке 18 сентября по учетной ставке 8%. Какую сумму он получил и чему равен дисконт?
4. Через 240 дней после подписания договора должник уплатил 380 тыс. сом. Кредит выдан под 12% годовых. Какова первоначальная сумма долга при условии, что временная база равна 360 дням?
5. Вексель был учтен за 24 дня до срока погашения по ставке 15% годовых. В результате учета владелец векселя получил 74438 сом. Какова номинальная стоимость векселя при условии, что год принимается равным 360 дням?
6. Переводной вексель выдан на сумму 300 тыс. сом с уплатой 15 ноября. Владелец документа учел его в банк 17.09 по учетной ставке 10%. Определить дисконт и годовую доходность операции учета по простой ставке для банка $i=?$
7. Владелец векселя через год должен получать по нему 250 тыс. сом. Какая сумма была внесена им в банк в момент приобретения векселя, если процентная ставка банка для расчета векселей равна 50%.
8. Владелец векселя, номинальная стоимость которого 750000 сом, а срок погашения через один год, обратился в банк через 120 дней до срока погашения векселя с просьбой о проведении операции его учета. Банк согласился учесть вексель по простой ставке 20%. Сколько денег получит владелец векселя?
9. Фирма обратилась в банк за ссудой под вексель в сумме 300000 сом сроком на 60 дней. Банк согласен выдать эту суду

при начислении 80% по простой учетной ставке. Какова номинальная стоимость векселя?

10. Владелец векселя номинальной стоимостью 50000 сом и сроком обращения один год предъявил его банку - эмитенту для учета за 90 дней до даты погашения. Банк учел его по ставке 14% годовых (проценты простые). Определить дисконтированную величину и величину дисконта, временная база $K=360$.

11. Вексель выдан на 5000 сом с уплатой 17 ноября, а владелец учел его в банк 19 августа по учетной ставке 8%. Определить сумму, полученную предъявителем векселя и доход банка при реализации дисконта.

12. Вексель на сумму 10 тыс. сом со сроком погашения 10.06.08, а также вексель на сумму 20 тыс. сом со сроком погашения 01.08.08 заменяются одним с продлением срока до 01.10.08. При объединении векселей применяется учетная ставка 25%. Определить сумму консолидированного векселя.

13. В контракте предусматривается погашение обязательств через 120 дней в сумме 48000 сомов при первоначальной сумме долга 46000 сом. Определить доходность операции для кредитора в виде процентной ставки и учетной ставки.

1.3. СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

1.3.1. Формула сложных процентов

Наращенная сумма S_n определяется формулой:

$$S_n = P \cdot (1+i)^n$$

число $K_n = (1+i)^n$ назовем множителем наращения сложных процентов.

Тогда

$$S_n = P \cdot K_n \tag{1.3.1.1}$$

и называется формулой сложных процентов.

где i – процентная ставка сложных процентов

n – целое число.

В финансовых расчетах часто приходится вычислять суммы, наращенные за дробным числом периодов начисления.

Так например, приходится знать наращенную сумму за 3 года 2 месяца, что записывается следующим образом:

$$n = 3 + \frac{2}{12} = 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}.$$

Существуют два способа начисления сложных процентов *антисипативный и декурсивный.*

В случае декурсивного способа расчета сложных процентов начисление процентов на первоначальную сумму производится в конце периода наращения.

Если срок ссуды измеряется дробным числом лет, то наращенную сумму можно найти смещенным методом:

если n - дробное число, то $n=[n]+\{n\}$,

где $[n]$ - целая часть числа n;

$\{n\}$- дробное число n.

Тогда формулу (1.3.1.1) можно представить в виде:

$$S = P \cdot (1+i)^{[n]} \cdot (1 + \{n\} \cdot i \qquad (1.3.1.2)$$

Задача 1. Сберегательный банк начисляет ежегодно 8% сложных. Клиент положил в этот банк 44036 сом. Какая сумма будет на его счете:

а) через 5 лет;

б) через 6 лет и 3 месяца?

Решение:

а) Для нахождения наращенной суммы S, применяем формулу (1.3.1.1).

Известно: $i=0,08$; $n=5$; $P=44036$ *сом.*

Тогда $S=44036 \cdot (1+0,08)^5=44036 \cdot (1,08)^5=44036 \cdot 1,469328=64703,33$ *сом.*

Если же банк выплачивает 8% простых, то через 5 лет на счету была бы меньшая сумма.

$$S=44036 \cdot (1+0,08 \cdot 5)=44036 \cdot 1,4=61650,40 \text{ сом}$$

б) по формуле $S = P\cdot(1+i)^n$ находим наращенную сумму S при $P = 44036$, $i = 0,08$, $n = 6,25$:

$$S = 44036\cdot(1+0,08)^{6,25} = 44036\cdot(1,08)^6\cdot(1,08)^{\frac{1}{4}} = 44036\cdot 1,586874\cdot 1,01942 =$$
$$= 44036\cdot 1,6177048218 \approx 71237,102 \text{ сом.}$$

В практике финансовых расчетах ставку сложных процентов, указывают на период, равный году, но начисление сложных процентов может производиться каждое полугодие, квартал, месяц или даже день. При этом, за каждый такой период, равный $1/m$ начисляются сложные проценты.

В этом случае, наращенная сумма в сложных процентах определяется формулой:

$$S = P\cdot(1+\frac{i}{m})^{nm} \qquad (1.3.1.3)$$

где n – длительность промежутка времени в течение которого начисляются сложные проценты (n измеряется в годах). Так например, если будем рассматривать один квартал, полугодие, то $n=0,25$ и $nt=0,5$.

Если при годовой ставке сложных процентов I вычисление сложных процентов производится m раз в году поставке j_m. Тогда формула (1.3.1.3) примет вид:

$$S = P\cdot(1+\frac{j_m}{m})^{nm} \qquad (1.3.1.4)$$

Если срок ссуды измеряется дробным числом лет, а начисление процентов m-раз в году, то наращенная сумма определяется по следующему смешанному методу:

$$S = P\cdot(1+\frac{j}{m})^{mn}\cdot(1+\frac{j}{m}\cdot\{n\}) \qquad (1.3.1.5)$$

где mn – число полных периодов начисления процентов

$\{n\}$ – дробная часть одного периода начисления процентов.

<u>Задача 2.</u> На сумму 10000 сом ежеквартально по ставке 12% годовых начисляются сложные проценты в течение 16 месяцев. Определить величину наращенной суммы?

Решение:

Общее число периодов начисления процентов составит $mn=5$, $\{n\}=0.333$. применим смешанный метод начисления наращенной суммы

$$S=P\cdot(1+\frac{j}{m})^{mn}\cdot(1+\frac{j}{m}\cdot\{n\})=10000\left(1+\frac{0,12}{5}\right)^5\cdot\left(1+0,333\cdot\frac{0,12}{5}\right)^5\cdot1,007992=$$

$$=10000\cdot1,1259\cdot1,007992\approx11348,86\ сом$$

Наращенную сумму можно определить с применением антисипативного метода. В n-периоде наращенная сумма определяется по формуле

$$S=P\cdot\frac{1}{(1-d)^n} \tag{1.3.1.6}$$

Обозначим второй множитель через K_n, т.е. $K_n=\frac{1}{(1-d)^n}$ и он называется коэффициентом наращения;

d – учетная ставка сложных процентов;

n – число лет.

При наращении сложных процентов по учетной ставке несколько раз в году наращенная сумма определяется по формуле

$$S=P\cdot\frac{1}{(1-\frac{f}{m})^{mn}} \tag{1.3.1.7}$$

где f - номинальная учетная ставка;

m - число периодов начисления процентов в течение года;

n - число лет.

Задача 3. Срочный вклад в размере 25000 сом положен в банк на 4,5 года. По условиям договора начисление процентов производится один раз в году по сложной учетной ставке $d=25\%$ годовых.

Определите наращенную сумму.

Решение.

Наращенную сумму S определим формулой

$$S = P \cdot \frac{1}{(1-d)^n}$$

Здесь $p = 25000,\ d = 0{,}25,\ n = 4{,}5$. Тогда

$$S = \frac{25000}{(0{,}75)^{4,5}} = \frac{25000}{(0{,}75)^{\frac{9}{2}}} = \frac{25000}{(\sqrt{0{,}75})^9} = \frac{25000}{(0{,}866)^9} = \frac{25000}{0{,}274} \approx 91240{,}88 \text{ сом.}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какой величины достигнет долг, равный 550000 сом через 5 лет при росте по сложной ставке 14,5% годовых?
2. Ссуда была выдана на два года. С 1 марта 2005г. по 1 марта 2007г. Размер ссуды 5 млн. сом. Необходимо распределить начисленные проценты (ставка 12% АСТ/АСТ) по календарным годам. Указание: Общий срок ссуды делится на два периода n_1 и n_2.
   Соответственно $I = I_1 + I_2$,
   где $I_1 = P \cdot \left[(1+i)^n - 1\right]$ $\quad I_2 = P \cdot (1+i)^{n_1}\left[(1+i)^{n_2} - 1\right] = P \cdot \left[(1+i)^n - (1+i)^{n_1}\right]$
3. На сумму 25000 сом ежеквартально по ставке 14% годовых начисляются сложные проценты в течение 18 месяцев. Определить величину наращенной суммы двумя методами.
4. Какой величины достигнет долг, равный 100000 сом, через 5 лет при росте сложной ставки 16,5% годовых?
5. На сумму 120000 сом ежеквартально по ставке 16,5% годовых начисляются сложные проценты в течение 16 месяцев. Определите величину наращенной суммы двумя методами.
6. Срочный вклад в размере 10000 сом положен в банк на 3,5 года. По условиям договора начисления процентов производится один раз в году по сложной учетной ставке $d = 15\%$ годовых.
7. Сумма в 15 млн. сом выплачивается через 10 лет. Необходимо определить ее современную величину при условии, что применяется ставка сложных процентов равная 11% годовых.

8. Клиент внес 400 долларов США в банк по номинальной процентной ставке 10%. Определите коэффициент наращения, наращенную сумму при сроке вклада 12 месяцев. Проценты сложные начисляются: один раз в год, в полугодие, поквартально. Ежемесячно.
9. Определить размер одинаковых взносов в конце года при начислении на них сложных процентов по годовой ставке 0,08 для создания к концу 5-го года фонда, равного 550 000 сом.
10. Какую сумму необходимо проставить в договор, если заемщику предоставлен кредит в 1 млн. сом, со сроком погашения 2.5 года, а наращение процентов проводится по сложной годовой учетной ставке 20% и в случае ежеквартального начисления?
11. Для создания страхового фонда фирма ежегодно выделяет в конце года по 120 000 сом, которые вкладываются в банк. Определить сумму, накопленную в страховом фонде через 5 лет, если начисляются сложные проценты по годовой ставке 10 %.
12. Господин Акматов желает положить в банк, который выплачивает 10% сложных годовых, такую сумму, чтобы его сын, студент 1 курса, мог снимать с этого счета ежегодно по 12 000 сом, исчерпав весь вклад к концу пятилетнего срока учебы. Какую сумму должен положить в банк господин Акматов?
13. АО создает благотворительный фонд, для чего в конце каждого года в банк делается взнос в размере 45000 сом. На собранные деньги банк начисляет сложные проценты по годовой процентной ставке 15%. Определить размер фонда через 10 лет.
14. Сумма в 3 млн. сом выплачивается через 6 лет. Какова её современная величина при условии, что применяется проценты по ставке 10% годовых.
15. При двух одинаковых процентных повышениях заработная плата с 8500 сом обратилось в 11500 сом. Определите, на сколько процентов повышалась она каждый раз?
16. Пусть ставка налога на проценты равна 10%. Процентная ставка -30% годовых, срок начисления

процентов – 5 лет. Первоначальная сумма ссуды – 1 200 000 сом. определите размеры налога на проценты при начислении простых и сложных процентов.

1.3.2. Эффективная ставка процентов

Если начисления процентов будет производиться m раз в году, а срок – n лет, то общее количество периодов начисления за весь срок финансовой операции составит $N=n\cdot m$. Тогда формула сложных процентов определяется в виде:

$$S = P\cdot\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} \qquad (1.3.2.1)$$

Пример 1: Первоначальная сумма 2000 сом, размещена в банк на 2 года по ставке процента равной 10% годовых, осуществляется ежеквартальные начисления процентов. определить наращенную сумму S и сумму начисления процентов.

Решение:

Количество периодов начисления $N=n\cdot m=4\cdot 2=8$

Наращенная сумма равна:

$$S = P\cdot\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} = 2000\cdot\left(1+\frac{0,1}{4}\right)^{8} = 2000\cdot(1,025)^{8} \approx 2436,81\ сом.$$

Тогда сумма начисленных процентов будет:

$$I = S - P = 2436,81 - 2000 = 436,81\ сом$$

Таким образом, через два года на счете будет находиться сумма в размере 2436,81 сом, из которой 2000 сом, является первоначальной суммой, размещенной на счете, а 436,81 сом – сумма начисленных процентов.

Эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m-разовое наращение в год по ставке $\frac{j}{m}$:

$(1+i)^n = (1+\frac{j}{m})^{mn}$. Следовательно $\quad i_{эф} = (1+\frac{j}{m})^m - 1 \quad$ (1.3.2.2)

Из формулы (1.3.2.2) следует, что эффективная ставка зависит о количества внутригодовых начислений.

Наращенные суммы на один и тот же капитал равны: $p\cdot\frac{1}{(1-d_{эл})^n} = p\cdot\frac{1}{(1-\frac{f_m}{m})^{mn}}$.

Отсюда учетная ставка равна: $d_{эл} = 1-(1-\frac{f_m}{m})^m$ (1.3.2.3)

Эффективную ставку, кроме этих формул, можно определить формулами:

$$i_c = \frac{d_c}{1-d_c} \quad (1.3.2.4)$$

$$i_c = e^{\delta} - 1 \quad (1.3.2.5)$$

$$i_c = \frac{1}{(1-\frac{f_m}{m})^m} - 1 \quad (1.3.2.6)$$

Вычисление эффективной процентной ставки применяется для определения реальной доходности финансовой операции.

Эта доходность определяется соответствующей эффективной процентной ставкой.

Пример 2: Первоначальная сумма 2000 сом размещена в банк на 2 года с ежемесячным начислением процентов. Определить эффективную ставку ежеквартального начисления процентов, исходя из 10% годовых.

Решение:

Эффективная ставка ежеквартальных начислений процентов, исходя из 10% годовых, составит:

$$i_{эф} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1 = \left(1+\frac{0,1}{4}\right)^4 - 1 = (1,025)^4 - 1 = 0,1038$$

Эффективная ставка ежемесячного начисления процента будет равна:

$$i = (1 + \frac{j}{m})^m - 1 = (1 + \frac{0,1}{0,12})^{12} - 1 = 0,1047.$$

Таким образом, годовая ставка, эффективная номинальная ставка процентов в размере 10% годовых при ежемесячном начислении процентов составит 10,47% против 10,38% с ежеквартальным начислением процентов.

Чем больше периодов начисления, тем быстрее идет процесс наращения.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Банк учитывает векселя по сложной учетной ставке d_c=8%. Какова реальная доходность этой операции?
2. Банк выплачивает по вкладам 16% годовых (сложных). Какова реальная доходность вкладов в этот банк, если начисление процентов делается:
   а) по полугодиям;
   б) поквартально;
   в) ежемесячно;
   г) непрерывно?
3. Банк выплачивает векселя по сложной учетной ставке f_4=8%. Какова реальная доходность этой операции?
4. Долговое обязательство на сумму 2 млн. сом, срок оплаты которого наступает через 5 лет. Определить сумму полученную при поквартальном учете по номинальной учетной ставке 15% и эффективную учетную ставку.
5. Сумма в размере 80000 сомов дана в долг на 2 года по ставке процента равной 10% годовых, также для вклада при ежемесячном начислении процентов по годовой ставке 10%. Определить эффективную ставку ежеквартального начисления процентов, исходя из 10% годовых и эффективную ставку.

6. Если номинальная ставка равна 18% при помесячном начислении процентов, то необходимо определить эффективную ставку.
7. Каков размер эффективной ставки, если учетная ставка равна 25% при месячном начислении процентов?
8. Вычислить эффективную годовую процентную ставку по займу, если номинальная ставка равна 14% годовых и проценты начисляются:

   а) ежегодно;

   б) каждые 6 месяцев;

   в) ежемесячно;

   г) непрерывно.
9. Определите эффективную ставку сложных процентов с тем, чтобы получить такую же наращенную сумму, как и при использовании номинальной ставки 6% при ежеквартальном начислении процентов ($m=10$).
10. Банк начисляет сложные проценты на вклад, исходя из годовой номинальной процентной ставки 0,11. Определите эффективную ставку при ежемесячной капитализации процентов.
11. Вычислите эффективную годовую процентную ставку по займу, если номинальная процентная ставка равна 12% годовых и проценты начисляются:

   а) ежегодно;

   б) каждые 6 месяцев;

   в) ежемесячно;

   г) непрерывно.
12. Долговое обязательство номинальной стоимостью 650 тыс. сом должно быть погашено через три года. Сложная учетная ставка равна 30% годовых. Начисление процентов ежеквартальное. Требуется определить настоящую величину стоимости обязательства и эффективную учетную ставку.
13. Что выгоднее: вложить 30000 сом на 1 месяц под годовую ставку 12% или на 6 месяцев под 12,2%
14. Что выгоднее: вложить 22,5 тыс. сом на 1 год под годовую ставку 12,5% или на 3 месяца под годовую ставку 12%
15. Банк начисляет сложные проценты на вклад, исходя из годовой номинальной процентной ставки 0,12. найдите

эффективную ставку при ежемесячной капитализации процентов.

16. Вычислить эффективную годовую процентную ставку по займу, если номинальная ставка равна 12% годовых и проценты начисляются:
   а) ежегодно;
   б) каждые 6 месяцев;
   в) ежемесячно;
   г) непрерывно

17. Пользуясь определением эффективной ставки, найдите зависимость r_{ef} от номинальной ставки i.

18. Какая непрерывная ставка заменит поквартальное начисление процентов по номинальной ставке 20%?

19. Долговое обязательство на сумму 7,5 млн. сом, срок оплаты которого наступает через 8 лет, продано с дисконтом по сложной учетной ставке 15% годовых. Определить:
   а) размер полученной за долг суммы и величину дисконта;
   б) найти эффективную учетную ставку (при поквартальном учете).

1.3.3. Переменная ставка процентов

В случае использования переменных процентных ставок, формула наращения имеет вид:

$$S = P \cdot (1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+i_k)^{n_k} = P \cdot \prod_{c=1}^{k} (1+i_c)^{n_c} \qquad (1.3.3.1)$$

где i_k – последовательные во времени значения процентных ставок;

n_k – длительность периодов в течении которых используются соответствующие ставки.

<u>Пример 1:</u> Фирма получила кредит в банке на сумму 1500000 сомов сроком на 4 года. Процентная ставка по кредиту определена в 12% для 1 года, для 2-го года предусмотрена надбавка к процентной ставке в размере 1,25%, для последующих лет 1%.

Определить сумму долга, подлежащую погашению в конце срока займа.

Решение:

Для определения суммы долга, необходимую для погашения в конце срока займа, используем формулу (1.3.3.1)

$$S = P \cdot (1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+i_k)^{n_k} = 1500000 \cdot (1+0{,}12) \cdot (1+0{,}1325) \cdot (1+0{,}1425)^2 =$$

$$= 1500000 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}1325 \cdot (1{,}1425)^2 = 1500000 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}328 \cdot 1{,}3053 = 2483463{,}78 \text{ сом}$$

Таким образом, сумма, подлежащая погашению в конце срока займа, составит 248463,78 сома, из которых 1500000 сомов являются непосредственно суммой долга, а 248463,78 сом – проценты по долгу.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Малые и средние предприятия получили кредит в банке на сумму 1450000 сомов сроком на 5 лет. Процентная ставка по кредиту определена в 10% для 1-го года, для последующих лет предусмотрена надбавка к процентной ставке соответственно 1,2%, 1,21%, 1,22% и 1,23%. Определить сумму долга, подлежащую погашению в конце срока займа.
2. Фирма получила кредит в банке на сумму 3750000 сомов сроком на 10 лет. Процентная ставка по кредиту определена в 8% для 1-го года, для 2-го года предусмотрена надбавка к процентной ставке в размере 1,2%, для последующих лет 1%. Определить сумму долга, подлежащую погашению в конце срока займа.
3. Господин Иванов М.А. получил кредит в банке 450000 сом для приобретения микроавтобуса «Мерседес-Бенц» сроком на 5 лет. Процентная ставка по кредиту определена в 10% для 1-го года, для второго года предусмотрена надбавка к процентной ставке в размере 1,3%, а для последующих лет 1%. Определить сумму долга, подлежащую погашению в конце срока займа.
4. Господин Абдылдаев М.Ю. получил кредит в банке 27000 сомов для приобретения дома сроком на 3 года. Определив

процентную ставку в 8% для первого года, для последующих лет предусмотрена надбавка: второй год 2%, третий год 11%. Определить сумму долга, подлежащую погашению в конце срока займа.

5. Фирма получила кредит в банке на сумму 4 млн. сом сроком 5 лет. Процентная ставка по кредиту определена в 9,5% для 1-го года, для второго года предусматривается надбавка к процентной ставке в размере 1,5%, для 3-го года и последующих лет – в размере 0,75%. Определить сумму долга, подлежащую погашению по истечении срока займа.

1.3.4. Непрерывное начисление сложных процентов

На практике часто встречаются случаи, когда процентные начисляются непрерывно, за сколь угодно малый промежуток времени. Если проценты начисляются ежедневно, то годовой коэффициент (множитель) наращения будет

$$K_n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m = \left(1+\frac{j}{365}\right)^{365}$$

Поскольку проценты начисляются непрерывно, то предел при $m \to \infty$, коэффициент (множитель) наращения стремится к e^j, т.е. имеем:

$$S = P \cdot e^{\delta n} \qquad (1.3.4.1)$$

где $e \approx 2.717281$ – число дилера.

Дискретные и непрерывные ставки наращения имеют следующую зависимость:

$$(1+i)^n = e^{\delta n}$$

Отсюда $\delta = \ln(1+i)$ или $i = e^{\delta} - 1$. (1.3.4.2)

Ставку непрерывных процентов называют силой роста и обозначают через δ.

Пример 1: Банк начисляет $j=8\%$ сложных процентов. Клиент положил в этот банк 25000 сом. Какая сумма будет на его счете через 5 лет.

Решение:
Применяя формулу (1.3.4.1) при $P=25000$, $\delta=j,=0,08\%$, $n=5$, определим наращенную сумму.

$$S = 25000 \cdot e^{0.08 \cdot 5} = 25000 \cdot e^{0.4} = 25000 \cdot 1,49182 = 37295,5 \text{ сом.}$$

Пример 2: На первоначальный капитал в сумме 15500 сом начисляются сложные проценты – 8% годовых в течение 2 лет. Определить наращенную сумму, если начисление процентов производится непрерывно.

Решение:
Сначала найдем силу роста δ, после него определим сумму S.

$$\delta = \ln(1+i) = \ln 1,08 = 0,0769611$$

$$S = P \cdot e^{\delta n} = 15500 \cdot e^{0,0769611 \cdot 2} = 15500 \cdot e^{1,5392} = 15500.$$

Пример 3: На первоначальный капитал в сумме 500 сом начисляются сложные проценты – 8% годовых в течение 4 лет. Определить наращенную сумму, если начисление производится непрерывно.

Решение:
Найдем сначала силу роста δ, а потом наращенную сумму S.

$$\delta = \ln(1+i) = \ln 1.08 = 0,0769611;$$

$$S = Pe^{\delta} = 500 \cdot e^{0,0769611} \approx 680,25 \text{ сом}$$

Пример 4: Кредит в размере 1000000 сомов получен сроком на 3 года под 8% годовых. Определить сумму подлежащую возврату в конце срока кредита, если проценты будут начисляться:

а) один раз в год;

б) ежедневно;
в) непрерывно.

Решение:
Используем формулы дискретных и непрерывных процентов:
- начисление один раз в год

$$S = 1000000 \cdot (1 + 0,08)^3 = 1259712 \text{ сом}$$

Ежедневное начисление процентов определим в виде

$$S = 1000000 \cdot \left(1 + \frac{0,08}{365}\right)^{365 \cdot 3} = 1271216 \text{ сом}$$

Непрерывное начисление процентов

$$S = 1000000 \cdot e^{0,08 \cdot 3} = 1271249 \text{ сом}$$

Непрерывное начисление процентов используется при анализе сложных финансовых задач, например, обоснование и выбор инвестиционных решений.

Оценивая работу финансового учреждения, где платежи за период поступают многократно, целесообразно и предполагают, что наращенная сумма непрерывно меняется во времени и применяется непрерывное начисление процентов.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий непрерывные проценты по ставке j_x=7%, чтобы через 10 лет на счете было 7500 сом?
2. Банк начисляет на вложенные в него деньги проценты непрерывно по ставке: в 2004г. – 12%, в 2005г. – 18%, в 2006г. – 24%. Какая сумма будет на счете 31 декабря 2007 года, если 1 января 2004 года на этот счет положено 10000 сом?
3. Банк начисляет на вложенные в него деньги проценты по ставке j_4=6% и собирается перейти к непрерывному

начислению процентов. Какую силу роста должен установить банк, чтобы доходы клиентов не изменялись?

4. Кредит в размере 500000 сомов получен сроком на 4 года под 8% годовых. Определите сумму подлежащую возврату в конце срока кредита, если проценты начисляются:
   а) один раз в год;
   б) ежедневно;
   в) непрерывно.
5. Сумма, на которую начисляются непрерывные проценты, равна 150000 сом, сила роста 10%, срок 5 лет. Непрерывные наращения по ставке равной 10% равнозначны наращению за тот же срок дискретных сложных процентов по годовой ставке.
   Найти:
   а) наращенную сумму;
   б) $i_{эф}$;
   в) наращенную сумму по ставке $i_{эф}$.

1.3.5. Дисконтирование по сложным процентам и по сложным учетным ставкам

Современная стоимость P величины S определяется в случае сложной процентной ставки по формуле:

$$P = S \cdot (1+i)^{-n} = S \cdot K_{i,n} \qquad (1.3.5.1)$$

где $K_{i,n} = (1+i)^{-n}$ - дисконтный коэффициент (коэффициент дисконтирования)

Величину

$$D = S - P = S \cdot \left[1-(1+i)^{-n}\right] \qquad (1.3.5.2)$$

назовем величиной дисконта.

При начислении процентов m раз в году получим:

$$P = S \cdot (1+\frac{j}{m})^{-mn} = S \cdot K_{\frac{j}{m},mn} \qquad (1.3.5.3)$$

где $$K_{\frac{j}{m},nm} = (1+\frac{j}{m})^{-nm} \qquad (1.3.5.4)$$

Тогда величина дисконта определяется по формуле

$$D = S - P = S \cdot \left[1-(1+\frac{j}{m})^{-nm}\right] \qquad (1.3.5.5)$$

Пример 1: Сумма в 100 тысяч сом выплачивается через 4 года. В течение этого периода на первоначальную сумму начислим сложные проценты по 10% годовых. Определить ее современную величину:

а) ежегодно;

б) квартально.

Решение:

Если начисление процентов производилось ежегодно, то

$$P = 100 \cdot (1+0{,}1)^{-4} = 100 \cdot \frac{1}{(1{,}1)^4} = \frac{100}{1{,}4641} \approx 68{,}30 \text{ тыс.сом.}$$

Если же начисление процентов производилось ежеквартально, то

$$P = 100 \cdot (1+\frac{0{,}1}{4})^{-4 \cdot 4} = \frac{100}{(1{,}025)^{16}} = \frac{100000}{1{,}4845} \approx 67{,}363 \text{ тыс.сом.}$$

В учетных операциях широко применяется сложная учетная ставка, в этом случае:

$$P = S \cdot (1-d)^n \qquad (1.3.5.6)$$

При дисконтировании m раз в году используется номинальная учетная ставка f, то в этом случае, имеют место следующие формулы:

$$P = S \cdot (1-\frac{f}{m})^{mn} \qquad (1.3.5.8)$$

$$D = S - P = S \cdot \left[1 - (1 - \frac{f}{m})^{mn}\right] \qquad (1.3.5.9)$$

Пример 2: Долговое обязательство на сумму 6 тыс. сом со сроком погашения через 2 года было передано в банк для учета дисконтирования производится по ставке $f=12\%$ при $m=4$. Определить величину дисконта.

Решение:

На руки владелец обязательства получит следующую сумму:

$$P = 6 \cdot (1 - \frac{0{,}12}{4})^{2 \cdot 4} = 6 \cdot (1 - 0{,}03)^8 = 6 \cdot (0{,}97)^8 = 6 \cdot 0{,}7838 = 4{,}7028 \text{ тыс. сом}$$

Тогда, величина дисконта будет равной:

$$D = S - P = 6 - 4{,}7028 = 1{,}2972 \text{ тыс. сом.}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Ставка по облигации номиналом 12 тыс. сом – 6%. Определить число лет, необходимых для удвоения стоимости облигации, применив простые и сложные проценты:
   а) по процентной ставке;

   б) по учетной ставке.
2. Долговое обязательство на сумму 250 тыс. сом, срок оплаты которого наступает через 4 года, продано дисконтом по сложной учетной ставке 18% годовых. Каков размер полученной за долг суммы и величина дисконта (в тыс. сом)?
3. Сумма в 250 тыс. сом выплачивается через 6 лет. Определить ее современную величину и дисконтный множитель при условии, что применяется ставка сложных процентов, равная 14% годовых.
4. Имеется долговое обязательство на сумму 250 тыс. сом. Срок оплаты 4 года. Определить сумму, полученную при квартальном учете по номинальной учетной ставке 18% и эффективную учетную ставку ($f=0,18\%$; $m=4$; $mn=16$)?

5. Долговое обязательство на сумму 106 тыс. сом со сроком погашения через два года передано в банк для учета. Дисконтирование производилось по ставке $f=9\%$ при $m=4$. Определить величину дисконта.
6. Определите современную стоимость 100 тыс. сом, которые должны быть выплачены через четыре года. В течение этого периода на первоначальную сумму начисляются сложные проценты по 8% годовых:
а) ежегодно;
б) ежеквартально.

1.3.6. Определение срока ссуды и величины процентной ставки

Для сложных процентов срок ссуды и ставка процентов определяется с помощью следующих формул:

1. Срок ссуды:

$$n = \frac{\left[\lg\left(\frac{S}{P}\right)\right]}{\lg(1+i)} \qquad (1.3.6.1)$$

$$n = \frac{\lg\left(\frac{S}{P}\right)}{\lg\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}} = \frac{1}{m}\cdot\frac{\lg\left(\frac{S}{P}\right)}{\lg\left(1+\frac{j}{m}\right)} \qquad (1.3.6.2)$$

2. Ставка сложных процентов:

$$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1 \qquad (1.3.6.3)$$

$$j = m\left(\sqrt[mn]{\frac{S}{P}} - 1\right) \qquad (1.3.6.4)$$

Формула (1.3.6.3) получается из формулы $S = P \cdot (1+ni)^n$, формула (1.3.6.2) из формулы $S = P \cdot \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}$.

Пример 1: Что выгоднее: увеличение вклада в три раза за год или 46% годовых?

Решение:

Такого рода задач приходится решать не только лицам, занимающимися финансовой работой, но и населению, когда решается вопрос о том, куда выгоднее вложить деньги. В таких случаях решение сводится к определению процентной ставки:

$$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1 = \sqrt[3]{3} - 1 = 1{,}443 - 1 = 0{,}443.$$

Таким образом, увеличение вклада за три года в три раза эквивалентно годовой процентной ставке в 44,3%. Поэтому размещенные деньги под 46% годовых будет более выгодно.

При дисконтировании по сложным учетным ставкам d и f.

$$d = 1 - \sqrt[n]{\frac{P}{S}} \qquad (1.3.6.5)$$

$$f = m\left(1 - \sqrt[mn]{\frac{P}{S}}\right) \qquad (1.3.6.6)$$

Пример 2: Сберегательный сертификат куплен за 120 тыс. сом, выкупная его сумма 180 тыс. сом. Срок 2,5 года. Каков уровень доходности инвестиций в виде годовой ставки сложных процентов?

Решение:

По условию задачи S=*180 тыс. сом*, P=*120 тыс. сом.*

Тогда $i = \sqrt[2,5]{1{,}5} - 1 = (1+0{,}5)^{\frac{2}{5}} - 1 = 1 + 0{,}2 - 0{,}0302 + 0{,}007 - 1 = 0{,}1768$

Пример 3: Сертификат куплен за 120 тыс. сом, выкупная его сумма 180 тыс. сом. Срок до погашения векселя равен 2 годам.

Дисконт, при его учете составил 30%. Какая сложная годовая учетная ставка соответствует этому дисконту?

Решение:

Применим формулу (1.3.6.5). По данным задачи $\frac{P}{S}=\frac{120000}{180000}=0,6666...\approx 0,7$, откуда $d=1-\sqrt{0,7}\approx 1-0,8165=0,1835$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Срок ссуды 5 лет, договорная база процентной ставки – 11% годовых плюс маржа 0,5% в первые два года и 0,75% в оставшиеся годы. Определить множитель наращения.
2. Контракт по ссуде предусматривает ежеквартальное начисление сложных процентов по ставке 14% годовых. Срок ссуды 2 года. Требуется определить эквивалентную этим условиям ставку простых процентов.
3. На какой срок можно дать ссуду 40 тыс. сомов, исходя из 8% годовых, если возвращенная сумма будет составлять 45 тыс. сом?
4. Каким должен быть срок ссуды в днях, для того чтобы долг, равный 150 тыс. сом, вырос до 180 тыс. сом при условии, что начисляются простые проценты по ставке 25% годовых?
5. При двух одинаковых процентных повышениях заработная плата с 15 тыс. сом обратилась в 18816 сом. Определите на сколько процентов она повышалась каждый раз?
6. На какой срок может быть предоставлена сумма в размере 15 тыс. сом под 12,5%, при условии возврата 24 тыс. сом?
7. Через сколько лет вклад размером 750 сом достигнет величины 1500 сом при ставке процентов 13,94% с ежемесячным начислением процентов?
8. Рассчитать процентную ставку для четырехлетнего займа размером 10500 сом с ежемесячным погашением 375 сом.

1.4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СТАВОК И СРЕДНИЕ ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ

1.4.1. Эквивалентность процентных ставок

Две процентные ставки называются эквивалентными, если применение их к одинаковым суммам в течение одинаковых промежутков времени дают одинаковые наращенные суммы.

Формула для расчета наращенных сумм по простой ставке процентов и учетной ставке определяется формулами:

$$S_1 = P_1(1 + i_n); \qquad S_2 = \frac{P_2}{(1 + dn)}$$

Пусть наращенные суммы и капиталы равны, т.е. $S_1 = S_2$ *и* $P_1 = P_2$. Тогда, имеем $(1 + in) = \frac{1}{1 - dn}$, отсюда получаем формулы

$$i = \frac{d}{1 - dn} \qquad (1.4.1.1)$$

$$d = \frac{i}{1 + in} \qquad (1.4.1.2)$$

Последние две формулы верны, когда временные базы K равны. В качестве расчетных формул i и d, берем формулы:

$$i = \frac{365 \cdot d}{360 - t}; \qquad d = \frac{360 \cdot i}{365 + i \cdot t} \qquad (1.4.1.3)$$

где t – количество дней

Пример 1: Вексель учтен в банке по учетной ставке 11% в день окончания срока его обращения, равного 15 дням ($K=360$). Определить доходность этой операции по ставке простых процентов ($K=365$).

Решение:

Эквивалентная ставка простых процентов даст тот же финансовый результат. Вычислим i по формуле (1.4.1.3)

$$i = \frac{365 \cdot 0{,}11}{360 - 0{,}11 \cdot 150} = \frac{39{,}6}{343{,}5} = 0{,}1153 \qquad (11{,}53\%)$$

Простые и сложные проценты, начисляемые один раз в год (обозначим их через i_s и i_c), годовая ставка j_m, по которой m раз в год начисляются j_m/m сложные проценты, ставка непрерывных процентов (сила роста δ); простая и учетная ставка d_s и d_c и учетная ставка f_m, начисляемая m раз в году.

Формулы наращенной суммы S для всех семи видов процентных ставок определяется в виде:

$$S = P \cdot (1 + n \cdot i_s) \qquad (1.4.1.4)$$

$$S = P \cdot (1 + i_c)^n \qquad (1.4.1.5)$$

$$S = P\left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{mn} \qquad (1.4.1.6)$$

$$S = P \cdot e^{\delta n} \qquad (1.4.1.7)$$

$$S = \frac{P}{1 - n \cdot d_s} \qquad (1.4.1.8)$$

$$S = \frac{P}{(1 - d_c)^n} \qquad (1.4.1.9)$$

$$S = \frac{P}{\left(1 - \frac{f_m}{m}\right)^{mn}} \qquad (1.4.1.10)$$

В этих формулах n есть число лет (оно может быть дробным). Приравнивая правые части каких-либо двух из приведенных выше семи формул и выражая из этого равенства одну процентную ставку через другую, мы получаем условие эквивалентности соответствующих процентных ставок за n-лет.

<u>*Из (1.4.1.4)=(1.4.1.5), получим*</u>

$$i_s = \frac{(1+i_c)^n - 1}{n} \qquad (1.4.1.11)$$

$$i_c = \sqrt[n]{1+n \cdot i_s} - 1 \qquad (1.4.1.12)$$

(1.4.1.11) и (1.4.1.12) являются условием эквивалентности процентной ставки. Из (1.4.1.4)=(1.4.1.6), получим условия эквивалентности i_s и j_m:

$$i_s = \frac{(1+\frac{j_m}{m})^{nm} - 1}{n} \qquad (1.4.1.13)$$

$$j_m = m \cdot \left(\sqrt[nm]{1+n \cdot i_s}\right) - 1 \qquad (1.4.1.14)$$

Для получения условия эквивалентности i_s и δ, приравниваем правые части (1.4.1.4) и (1.4.1.7), тогда получим:

$$i_s = \frac{e^{\delta n} - 1}{n} \qquad (1.4.1.15)$$

$$\delta = \frac{\ln(1+n \cdot i_s)}{n} \qquad (1.4.1.16)$$

Из (1.4.1.4)=(1.4.1.9), имеем:

$$i_s = \frac{(1+d_c)^{-n} - 1}{n} \qquad (1.4.1.17)$$

$$d_s = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{1+ni_s}} \qquad (1.4.1.18)$$

Из (1.4.1.4)=(1.4.1.10) получим

$$i_s = \frac{(1-\frac{f_m}{m})^{-mn}-1}{n} \qquad (1.4.1.19)$$

$$f_m = m\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt[mn]{1+n\cdot i_s}}\right) \qquad (1.4.1.20)$$

Продолжая этот процесс, таких формул можно составить 42, выражающих одну из процентных ставок через эквивалентную ей другую процентную ставку.

Вычисление эквивалентных ставок применяется при изучении условий контракта.

Пример 2: Кредит предоставляется под 5% сложных годовых сроком на 8 лет. Субъект, берущий этот кредит, хочет получить его под простые проценты (ту же сумму на этот же срок). Какая ставка простых процентов должна быть предусмотрена контрактом?

Решение:

i_s – ставка простых процентов определяющаяся по формуле

$$i_s = \frac{(1+i_c)^n-1}{n} = (1+0{,}05)^8-1 = \frac{1{,}4774553-1}{8} = \frac{0{,}4774553}{8} = 0{,}0596819 \approx 0{,}0597$$

т.е. следует предоставить кредит под 5,97% простых.

Пример 3: Банк, выплачивающий на депозиты 7% сложных годовых хочет перейти к начислению непрерывных процентов. какую годовую ставку начисления непрерывных процентов (сила роста) δ должен установить банк, чтобы доходы вкладчиков остались без изменения?

Решение:

Требуется определить силу роста δ, эквивалентную ставке i_c сложных процентов. для ее определения воспользуемся формулой

$$\delta = \ln(1+i_c) = \ln(1+0{,}07) = \ln 1{,}07 = 0{,}0677$$

т.е. необходимо перейти к 6,77%.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Банк учитывает вексель по учетной ставке f_3=8% и желает перейти к сложной учетной ставке d_c. Какой величины должна быть ставка d_c, чтобы доход банка не изменялся?
2. Банк учитывает вексель по сложной учетной ставке d_c=6%. По какой учетной ставке f_m этот банк должен учитывать векселя, чтобы доход банка не изменился, если *а) m=2; б) m=4; в) m=12?*
3. Банк учитывает вексель по сложной учетной ставке d_c=8%. Какова реальная доходность этой операции.
4. Банк учитывает вексель по сложной учетной ставке f_4=8%. Какова реальная доходность этой операции.
5. Банк учитывает вексель за 120 дней до срока его оплаты по простой учетной ставке d_s=6%. Какую сложную учетную ставку должен установить банк, чтобы доход банка не изменился?
6. Банк начисляет на вложенные в него деньги проценты по ставке j_4=6% и собирается перейти к непрерывному начислению процентов. какую силу роста должен установить банк, чтобы доходы клиентов не изменились?
7. Банк выплачивает на вложенные в него деньги 10% годовых (сложных). Какую ставку j_m должен установить банк, чтобы доходы клиентов не изменились, если *а) m=2; б) m=6; в) m=10; г) m=12; д) m=∞?*

8. Определить ставку сложных процентов i_c, эквивалентную ставке: *а)* $j_2=10\%$; *б)* $j_6=10\%$; *в)* $j_{12}=10\%$; *г)* $j_{\infty}=10\%$
9. Определить ставку j_m, эквивалентную к простой ставке $i_c=12\%$.
10. Банк выдает ссуду на 5 лет под 7% годовых (сложных). Какую ставку простых процентов должен установить банк, чтобы полученный им доход не изменился?
11. Банк выдает ссуду на 10 лет под 6 простых процентов. Какую ставку сложных процентов должен установить банк, чтобы полученный им доход не изменился?
12. Банк начислял на вложенные в него деньги проценты непрерывно по ставке $\delta=10\%$. Какую ставку сложных процентов должен установить банк, чтобы полученный им доход не изменился?

1.4.2. Средние процентные ставки

Задачи по решению эквивалентности процентных ставок, в некоторых случаях можно решить с помощью равенства средних значений ставок. Рассмотрим два случая:

а) простые ставки (i_n);

б) сложные ставки (i_c).

1. Пусть за периоды $n_1, n_2, \ldots, n_m$ начисляются простые проценты по соответствующим ставкам $i_1, i_2, \ldots, i_m$, на один и тот же капитал P. тогда простые ставки i определяются формулой

$$\bar{i}=\frac{\sum_{t=1}^{m} i_t \cdot n_t}{n} \tag{1.4.2.1}$$

где $n=\sum_{t=1}^{m} n_t$ - общий срок наращения.

Для определения средней учетной ставки воспользуемся формулой:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{t=1}^{m} d_t \cdot n_t}{n} \qquad (1.4.2.2)$$

Эти формулы представляют собой арифметическую взвешенную.

Рассмотрим теперь сложные ставки.

Из равенства коэффициентов наращения

$$(1+\bar{i})^n = (1+i_1)^{n_1} \cdot (1+i_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+i_m)^{n_m} = \prod_{t=1}^{m} (1+i_t)^{n_t}$$

имеем $\bar{i} = \sqrt[n]{(1+i_t)^{n_t}} - 1$ (1.4.2.3)

т.е. из последней формулы $\bar{i}$ вычисляется как взвешенная средняя геометрическая.

Пример 1: Если для первых двух лет ссуды применяется ставка 8%, а в следующих 3-х лет - 10%, определите среднюю ставку за весь срок ссуды.

Решение:

Для решения этого примера воспользуемся формулой (1.4.2.3). средняя ставка за пять лет ссуды составит

$$\bar{i} = \sqrt[5]{(1+0{,}08)^2 \cdot (1+0{,}1)^3} - 1 = \sqrt[5]{1{,}5524784} - 1 \approx 0{,}0912 \qquad (9{,}12\%)$$

Если одновременно производятся несколько однородных операций с разными ставками i_t и разными начальными суммами P_t, то все суммы выданы на один и тот же срок n под простые проценты.

Из уравнения эквивалентности:

$$\sum_{t=1}^{m} P_t \cdot (1+\bar{i} \cdot n) = \sum_{t=1}^{m} P_t \cdot (1+i_t \cdot n)$$

Определим $$\bar{i} = \frac{\sum_{t=1}^{m} P_t i_t}{P_t} \qquad (1.4.2.4)$$

Отсюда следует, что искомая ставка равна взвешенной средней арифметической, в качестве весов берутся размеры ссуд.

Если проценты сложные, то уравнение эквивалентности представим в виде:

$$\sum_{t=1}^{m} P_t \cdot (1+\bar{i})^n = \sum_{t=1}^{m} P_t \cdot (1+i_t)^n$$

Отсюда средняя ставка сложных процентов:

$$\bar{i} = \sqrt[n]{\frac{\sum_{t=1}^{m} P_t (1+i_t)^n}{\sum_{t=1}^{m} P_t}} - 1 \qquad (1.4.2.5)$$

Пример 2: Выданы две ссуды: $P_1 = 1000$ *сом,* $P_2 = 2000$ *сом.* Первая выдана под 10% годовых, вторая – под 15%, сроки ссуд одинаковы и равны двум годам. Определить средние процентные ставки.

Решение:

а) Пусть ставки простые, тогда средняя процентная ставка будет

$$\bar{i} = \frac{1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}15}{3} = \frac{0{,}40}{3} = 0{,}1333 \qquad (13{,}33\%)$$

б) средняя процентная ставка для сложных процентов

$$\bar{i}=\sqrt{\frac{1\cdot(1{,}1)^2+2\cdot(1{,}15)^2}{3}}-1=\sqrt{\frac{1{,}21+2{,}645}{3}}-1=\sqrt{\frac{3{,}855}{3}}-1=1{,}1336-1=0{,}1336 \quad (13{,}36\%).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Выданы три ссуды: P_1*=1500 сом,* P_2*=2000 сом,* P_3*=2500 сом.* Первая выдана под 10%, вторая под 15%, третья под 20%. Сроки ссуд одинаковы и равны трем годам. Определить средние процентные ставки.
2. Выданы четыре ссуды: P_1*=1500 сом,* P_2*=2000 сом,* P_3*=2500 сом,* P_4*=3000 сом.* Первая выдана под 10%, вторая под 11%, третья под 12%, четвертая под 13%. Сроки ссуд одинаковы и равны четырем годам. Определить средние процентные ставки.
3. Если для первых двух лет ссуды применяется ставка 6%, а в последующих 2-х лет 8%, а в последующих двух лет 10%, определить среднюю ставку за весь срок ссуды.
4. Пусть, для первых двух лет ссуды применяется ставка 10%, для следующих четырех лет она составляет 12%. Найдите среднюю ставку за весь срок ссуды.
5. Если для первых трех лет ссуды применяется ставка 6%, для следующих двух лет она составляет 8%, то найдите среднюю ставку за весь срок ссуды.
6. Выданы две ссуды: P_1*=150 тыс. сом,* P_2*=300 тыс. сом.* Первая выдана под 8% годовых, а вторая – под 15%, сроки ссуд одинаковы и равны двум годам. Найти среднюю процентную ставку.

Глава 2. ИНФЛЯЦИЯ В ФИНАНСОВО-КОММЕРЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

2.1. Сущность инфляции и необходимость ее учета в качественном анализе

Инфляция – устойчивый рост среднего уровня цен на товары и услуги в экономике. Инфляция – многомерное и многоаспектное явление, которое классифицируется на основе различных критериев. Внешним проявлением инфляции является повышение общего уровня цен, т.е. совокупный рост цен на товары и услуги в течение длительного времени. Соответственно на денежную единицу приходиться меньше товаров, т.е. деньги обесцениваются. Т.о., под темпом инфляции h понимается относительный прирост цен за период, обычно он измеряется в процентах и определяется формулой $h = 100(I_\tau - 1)$.

В процессе снижения цен, происходит дефляция.

Темпы инфляции определяются с помощью индекса инфляции.

Индекс инфляции показывает во сколько раз выросли цены - I_τ, а уровень инфляции показывает, насколько процентов возросли цены – τ и он определяется формулой:

$$I_\tau = 1 + \tau \qquad (2.1.1)$$

Кроме этого, индекс потребительских цен (ИПЦ) дает достаточно обобщенную характеристику инфляции.

Уровень инфляции оценивается как темп прироста потребительских цен:

$$\tau = \text{ИПЦ} - 100\%$$

с учетом инфляции наращенная сумма определяется в виде:

$$S = \frac{P \cdot (1+i)^n}{(1+\tau)^n} \qquad (2.1.2)$$

Наращение осуществляется по простым или сложным процентам, но инфляция всегда оценивается по сложному проценту.

i – является фактором роста денег,

τ – показатель инфляции и он является фактором их обесценивания.

Пример 1: Пусть ежемесячный уровень инфляции 2,5%. Определить уровень инфляции за год.

Решение:

Индекс инфляции за месяц будет:

$$I_\tau = 1+\tau=1+0,025=1,025$$

Индекс инфляции за год определяется в виде:

$$J_\tau = (1+\tau)^{12} = 1,025^{12} = 1,3454$$

Уровень инфляции за год

$$\tau = J_\tau - 1 = 1,3454-1=0,3454$$

Следовательно, ожидаемая годовая инфляция составит 34,54%

Показатели финансовой операции могут быть номинальными и реальными.

При номинальной финансовой операции учитываем инфляцию, рассчитанную в текущих ценах.

При реальной финансовой операции учитываем влияние инфляции и рассчитанные в сопоставимых ценах базисного периода.

Реальная сумма вклада определяется формулой:

$$S_\tau = \frac{S}{J_\tau} \tag{2.1.3}$$

Наращенная сумма с учетом ее обесценения определяется формулой

$$C = S \cdot J_C \tag{2.1.4}$$

I_C – индекс покупательной способности цены определяется формулой

$$J_C = \frac{1}{J_\tau} \tag{2.1.5}$$

$$J_\tau = (1 + \frac{h}{100}) \tag{2.1.6}$$

Например, если темп инфляции за период равен 25%, то это означает, что цены выросли в 1,25 раза.

Можно определить индекс цен за несколько периодов по формуле:

$$J_t = \prod_{t=1}^{n}(1+\frac{h_t}{100}) \qquad (2.1.7)$$

где h_t – темп инфляции в периоде t

Если h – постоянный ожидаемый темп инфляции за один период, то за n таких периодов получим

$$J_t = (1+\frac{h}{100})^n \qquad (2.1.8)$$

Пример 2: Пусть прирост цен по месяцам составили 1,5; 1,2 и 0,5%.

Определить индекс цен за три месяца.

Решение:

$$I_t = (1+\frac{1,5}{100})(1+\frac{1,2}{100})(1+\frac{0,5}{100}) = 1,05\cdot 1,012\cdot 1,005 \approx 1,0323$$

Таким образом, темп инфляции за три месяца составит 3,23%

Брутто-ставки при условии полной компенсации инфляции определим формулой:

$$r = i + \frac{h}{100} \qquad (2.1.9)$$

При наращении по простым процентам имеем:

$$r = \frac{(1+ni)j_t - 1}{n} \qquad (2.1.10)$$

где j_t – индекс цен за учитываемый период.

Реальный показатель доходности в виде годовой процентной ставки можно определить при наращении сложных процентов на основе (2.1.9)

$$i=\frac{\frac{1+r}{1+\frac{n}{100}}}{}-1 \qquad (2.1.11)$$

Если брутто-ставка определяется по упрощенной формуле (2.1.9), то

$$i=r-\frac{n}{100} \qquad (2.1.12)$$

Согласно формуле (2.1.10), определим i:

$$i=\frac{1}{n}\left(\frac{1+nr}{I_r}-1\right) \qquad (2.1.13)$$

Пример 3: Определить реальные результаты вкладной операции для суммы 25000 сом, размещенной на полгода под 12% годовых, если ежемесячный уровень инфляции составляет 1,5%.

Решение:

Определим наращенную сумму вклада формулой $S=P\cdot(1+ni)$

Тогда $S=25000\cdot(1+5\cdot 0{,}12)=25000\cdot 1.06=26500\,сом$

Индекс инфляции за срок хранения вклада составит

$$J_r=(1+0{,}015)^6=(1{,}015)^6\approx 1{,}0934$$

Тогда реальная сумма вклада будет $S_r=\frac{26500}{1{,}0934}=24236{,}33\ сом.$

Таким образом, наращенная величина по своей покупательной способности с учетом инфляции будет соответствовать сумме 24236,33 сом, т.е. меньше на 763,67 сом, чем первоначальная сумма.

Пример 4: Определить индекс цен реальной годовой ставки при следующих условиях:

- годовой темп инфляции – 25%
- брутто-ставка – 30% годовых

* n=0,5 года

Решение:
Индекс цен за половину года:

$$I_r = \left(1 + \frac{0,25}{100}\right)^{0,5} = (1,25)^{0,5} = \sqrt{1,25} = 1,1180$$

Для простых процентов получим:

$$i = \frac{1}{0,5}\left(\frac{1 + 0,5 \cdot 0,3}{1,1180} - 1\right) = 2 \cdot 1,02862^{-2} = 2,05724 = 0,05724 \qquad (5,7\%)$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Определить номинальные результаты вкладной операции для суммы 35500 сом, размещенной на 1,5 года под 5% годовых, если ежемесячный уровень инфляции составляет 1,5%.
2. Определить реальные результаты вкладной операции для суммы 42500 сом, размещенной на 2 года под 12% годовых, если ежеквартальный уровень инфляции составляет 2,5%.
3. Если ежемесячный уровень инфляции составляет 1,5%, то необходимо определить:
   1) Индекс инфляции за месяц.
   2) Индекс инфляции за год.
   3) Уровень инфляции за год.
4. Если постоянный темп инфляции 5,5% в месяц, то определить темпы роста цены.
5. Если приросты цен по месяцам составили 2,5%; 1,8% и 1,5%, то каков индекс цен за три месяца.
6. На сумму 150000 сом в течение трех месяцев начисляются простые проценты по ставке 25% годовых. Ежемесячная инфляция характеризуется темпами: 1,5; 1,8 и 2,0. Определить индекс цен и наращенную сумму с учетом ее обесценивания.
7. Определить реальную годовую ставку на 5 лет для следующих условий:
   * годовой темп инфляции – 20%;
   * брутто-ставка – 25%.

8. Допустим, что месячный уровень инфляции составляет 5%. Банк предлагает клиентам вкладывать свои средства под 100% годовых. Определить годовой уровень инфляции и реальную годовую ставку.

9. В банк помещен вклад на сумму 4млн. сом под 100% годовых сроком на пять лет. Ожидаемый в течение этого периода темп инфляции оценивается величиной 50% в год. Требуется найти реальную сумму, которую будет иметь клиент по истечении пяти лет.

10. Клиент планирует разместить в банк 150000 сом сроком на два года под 30% годовых. Прогноз темпа роста инфляции составляет 20% в год. Требуется определить реальную сумму денег, которую клиент сможет иметь через два года и реальную годовую ставку процента.

11. Коммерческий банк принимает вклады населения сроком на 120 дней при условии 10% годовых. Годовой ожидаемый уровень инфляции составляет 8%. Определить простую процентную ставку с учетом инфляции и коэффициент наращения, приняв $K=360$ дней.

12. Фирма договорилась с банком о выделении кредита 10 млн. сом на год без учета инфляции. Ожидаемый годовой уровень инфляции составляет 10%. Определить процентную ставку с учетом инфляции, коэффициент наращения.

13. На сумму 135000 сом начисляются сложные проценты в течение 3 лет по годовой процентной ставке 0,08%. Темп прироста инфляции 0,03% в год. Определить:

а) наращенную сумму без учета инфляции;

б) реально наращенную сумму с учетом инфляции;

в) брутто-ставку;

г) наращенную сумму по брутто-ставке.

14. Предполагается, что тем инфляции составляет 20% в год. Какую ставку сложных процентов следует проставить в договоре, чтобы реальная доходность составляла 10%? Чему равна инфляционная премия?

2.2. Методы учета инфляции в финансовых расчетах

Общая формула для определения простой ставки процентов, компенсирующих ожидаемую инфляцию, имеет вид:

$$i_\tau = [(1 + n \cdot i) \cdot J_\tau - 1] : n \qquad (2.2.1)$$

где i_τ – номинальная ставка процента, ставки с поправкой на инфляцию

i – простая ставка процентов, характеризующих требуемую реальную доходность финансовой операции (нетто-ставка).

Пример 1: Банк выдал клиенту кредит на один год в размере 50 тыс. сом по ставке 5% годовых. Уровень инфляции за год составил 20%. Определить с учетом инфляции реальную ставку процентов по кредиту, погашаемую сумму и сумма процентов за кредит.

Решение:

Определим следующие показатели:

- номинальную наращенную сумму

$$S = P \cdot (1 + ni) = 50000 \cdot (1 + 0{,}05) = 50000 \cdot 1{,}05 = 52500\,сом$$

- номинальные начисленные проценты

$$I = S - P = 52500 - 50000 = 2500\,сом$$

- реальную наращенную сумму

$$S_\tau = \frac{S}{(1+\tau)} = \frac{52500}{(1+0{,}2)} = \frac{52500}{1{,}2} = 43750\,сом$$

- реальные проценты

$$I_\tau = S_\tau - P = 43750 - 50000 = -6250\,сом$$

Таким образом, получен убыток от финансовой операции в размере 6250 сом.

- ставка по кредиту с учетом инфляции будет равной

$$i_\tau = [(1 + n \cdot i) \cdot I_\tau - 1] : n = \frac{(1{,}05 \cdot 1{,}2 - 1)}{1} = 0{,}26\%$$

- номинальную наращенную сумму

$$S = P \cdot (1 + ni) = 50000 \cdot (1 + 0,26) = 50000 \cdot 1,26 = 63000 сом$$

- доход банка

$$I = S - P = 63000 - 50000 = 13000 сом$$

- реальный доход банка

$$I_\tau = S_\tau - P = \frac{S}{(1+\tau)} - P = \frac{63000}{1,2} - 50000 = 2500 сом$$

- реальная доходность финансовой операции

$$i = \frac{I_\tau}{P} = \frac{2500}{50000} = 0,05$$

Таким образом, чтобы обеспечить доходность в размере 5% годовых, ставка по кредите с учетом инфляции должна соответствовать 26% годовых.

Годовая ставка сложных процентов, обеспечивающая реальную доходность кредитной операции, определяется по формуле:

$$i_\tau = i + \tau + i\tau \tag{2.2.2}$$

<u>Пример 2:</u> Определить номинальную ставку процентов для финансовой операции, если уровень эффективности должен составлять 5% годовых, а годовой уровень инфляции 18%.

<u>Решение:</u>

Определим процентную ставку с учетом инфляции, задано $i=0,05$, $\tau=0,18$:

$$i_\tau = i + \tau + i\tau = 0,05 + 0,18 + 0,05 \cdot 0,18 = 0,23 + 0,009 = 0,239$$

Таким образом, номинальная ставка составляет 23,9% при реальной ставке 5%.

Для расчета номинальной ставки можно использовать следующую модель:

$$i_\tau = \left[\frac{(1+i)}{\sqrt[n]{1+\tau}}\right] - 1 \tag{2.2.3}$$

При начислении процентов несколько раз в год воспользуемся формулой:

$$I_\tau = m\left[(1+\frac{j}{m})\cdot\sqrt[n]{1+\tau}-1\right] \qquad (2.2.4)$$

эти модели позволяют производить учет инфляции и корректировку процентных ставок.

Путем вычисления реальной ставки осуществляется сравнение i и τ:

$$i_r = \frac{(i-\tau)}{(1+\tau)} \qquad (2.2.5)$$

Пример 3: Определить реальную ставку под 20% годовых, если уровень инфляции за год составляет 18%.

Решение:

Задано, что уровень инфляции за год составляет 18%, а размещено средств на год под 20% годовых

$$i_r = \frac{(0{,}20-0{,}18)}{(1+0{,}18)} = \frac{0{,}02}{1{,}18} = 0{,}017$$

Отсюда видно, что реальная ставка 1,7% годовых.

Обозначим через h годовой уровень инфляции в процентах. Тогда можно определить стоимость будущей суммы денег S на настоящий момент времени с учетом их инфляционного обесценивания с помощью формулы:

$$S = P\cdot\left(1+\frac{i_c}{100}\right)^n\cdot\left[\frac{1}{1+\dfrac{h}{100}}\right]^n \qquad (2.2.6)$$

где $1+h/100$ – индекс инфляции

i_c - сложная процентная ставка.

Пример 4: В банк помещен вклад в размере 320 тыс. сом под 30% годовых сроком на 5 лет. Ожидаемый в течение этого периода темп инфляции оценивается величиной 15% в год.

Требуется найти реальную сумму, которую будет иметь клиент по истечении пяти лет.

Решение:

Задано $P=320$ *тыс. сом,* $I_c=30\%$, $h=15\%$

Тогда воспользуясь формулой (2.2.6), имеем

$$S=320\left(1+\frac{30}{100}\right)^5\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{15}{100}}\right]^5=320\cdot(1{,}3)^5:(1{,}15)^5=1188{,}16:2{,}01\approx 591{,}12\ сом$$

Из этого расчета видно, что клиент через пять лет получит 188,16 тыс. сом, однако вследствие инфляции реальная стоимость тих денег на настоящий момент стоит лишь 591,12 тыс. сом.

Реальная годовая ставка:

$$i_{cp}=\frac{30-15}{1+\frac{15}{100}}=15:1{,}15=13{,}04\%$$

Действительно,

$$=320\cdot\left(1+\frac{13{,}04}{100}\right)^5=320\cdot(1{,}1304)^5=320\cdot 1{,}846=590{,}72\approx 591\ тыс.\ сом$$

Пример 5: Если месячный уровень инфляции составляет 5%, а анк предлагает клиентам вкладывать свои средства под 100% одовых, то насколько это будет выгодным для клиентов при сроке клада на 1 год?

Решение:

Возьмем формулу (2.2.6) и вместо i_c и h подставим оответственно следующие значения: 100% и 5%, тогда получим

$$S=P\cdot\left(1+\frac{100}{100}\right)\cdot\left[\frac{1}{1+\frac{5}{100}}\right]^{12}=2P\cdot\frac{1}{(1{,}08)^{12}}=1{,}1137$$

Годовой уровень инфляции:

$$h = 100 \cdot \left[\left(1 + \frac{5}{100}\right)^{12} - 1\right] = 79{,}586\%$$

Реальная годовая ставка:

$$i_{cp} = \frac{100 - 79{,}586}{1 + \frac{79{,}586}{100}} = 11{,}37\%$$

Предлагаемые банком для клиентов условия вложения денег можно назвать не очень привлекательными. Реальный доход составит 11,37%

УПРАЖНЕНИЯ

1. Банк выдал клиенту кредит на один год по ставке 12%, а уровень инфляции составляет за год 18%. Определить ставку кредита с учетом инфляции.
2. Банк выдал клиенту кредит на два года в размере 50000 сом по 10% годовых. Уровень инфляции за год составил 20%. Определить с учетом инфляции реальную наращенную сумму и реальные проценты.
3. Банк выдал клиенту кредит на три года в размере 150000 сом по 10% годовых. Уровень инфляции за год составил 25%. Определить с учетом инфляции реальный доход банка и реальную доходность финансовой операции.
4. Банк выдал клиенту кредит на пять лет по ставке 12% годовых. Уровень инфляции за год составил 22%. Определить ставку кредита с учетом инфляции.
5. Определить номинальную ставку процентов для финансовой операции, если уровень эффективности составит 8% годовых, а годовой уровень инфляции 16%.
6. Определить номинальную ставку процентов, если уровень эффективности ежеквартально составляет 10%, а ежеквартальный уровень инфляции 18%.

7. Определить реальную ставку при размещении средств на год под 25% годовых, если уровень инфляции за год составляет 20%.
8. Клиент планирует разместить в банке 65 тыс. Сом сроком на два года под 30% годовых. Прогноз темпа роста инфляции составляет 20% в год. Требуется определить реальную сумму денег, которую клиент сможет имеет два года и реальную годовую ставку процента.

2.3. Расчет наращенных сумм в условиях инфляции

Пусть за рассматриваемый промежуток времени стоимость потребительской корзины возросла с величины S до S_1, тогда стоимость потребительской корзины изменилось на величину $\Delta S = S_1 - S$.

Тогда величина $\alpha = \frac{\Delta S}{S}$ называется уровнем инфляции. Она показывает на сколько процентов выросли цены за рассматриваемый период времени и показывает темпы инфляции.

Пусть α - годовой темп инфляции, а S – некоторая сумма.

Для того, чтобы сохранилась покупательная способность, сумма S должна составлять:

через один год - $S_1 = S \cdot (1+\alpha)$, а через n лет

$$S_n = S \cdot (1+\alpha)^n \tag{2.3.1}$$

через n-лет индекс инфляции будет

$$I_n = (1+\alpha)^n \tag{2.3.2}$$

Инфляционный рост цен подчиняется закону сложного процента.

<u>Пример 1:</u> Цены за каждый месяц растут на 5%. Определите годовой уровень инфляции.

<u>Решение:</u>

По условию примера месячный темп инфляции α=0,05. С помощью формулы (2.3.2) определим индекс цен за год:

$$I_n = (1+\alpha)^n = 1{,}05^{12} \approx 1{,}7959$$

но $I_1 = 1 + \alpha$, где α_1 - темп инфляции за год.

Отсюда $\alpha = I - 1 = 0{,}7959$.

Таким образом, уровень инфляции за год составляет 79,59%.

Пусть i – безинфляционная ставка, отражающая реальную доходность операции; i_a – процентная ставка, которая учитывает инфляцию. Тогда наращенную сумму S определим в виде:

$$S = P \cdot (1 + i_a) \quad или \quad S = P \cdot (1 + i)(1 + \alpha)$$

Приравнивая правую часть этих неравенств, получим

$$1 + i_a = (1 + i)(1 + \alpha) \quad или \quad i_a = i + \alpha + i\alpha \qquad (2.3.3),$$

которую назовем формулой Фишера.

Исходя из формулы Фишера, можно сделать следующие выводы:

1. если $i=\alpha$, то реальная доходность операции равна нулю;
2. если $i_a < \alpha$, то $i<0$ – отсюда финансовая операция будет убыточной;
3. если $i_a > \alpha$, то $i>0$ -, то финансовая операция приносит реальный доход.

<u>Пример 2:</u> Банк выдал клиенту кредит на три года в размере 120000 сом. Реальная доходность составляет 10% годовых (проценты сложные). Расчетный уровень инфляции – 14% в год. Определить ставку процентов при выдаче кредита и наращенную сумму.

<u>Решение:</u>

По условию задачи $i=0{,}10$; $\alpha=0{,}14$. тогда по формуле (2.3.3) определим годовую ставку с учетом инфляции

$$i_a = i + \alpha + i\alpha = 0{,}10 + 0{,}14 + 0{,}14 \cdot 0{,}10 = 0{,}24 + 0{,}014 = 0{,}254\,.$$

Тогда наращенная сумма будет

$$S = 120000 \cdot (1+0{,}254)^3 = 120000 \cdot (1{,}254)^3 = 120000 \cdot 1{,}9720 = 236640 \ сом$$

Если рассматриваемый наш период n будет отличен от одного года, то для простых ставок процентов, имеем

$$1 + i_\alpha \cdot n = (1+in) \cdot I_n$$

Отсюда $$i_\alpha = \frac{(1+in) \cdot I_n - 1}{n} \qquad (2.3.4)$$

Для сложных процентов:

$$(1+i_\alpha)^n = (1+i)^n \cdot I_n.$$

Отсюда для сложных ставок процентов с учетом инфляции, получим:

$$i_\alpha = (1+i) \cdot \sqrt[n]{I_n} - 1 \qquad (2.3.5)$$

Пример 3: Банк выдал кредит клиенту в размере 150000 сом на 4 года. Реальная доходность составит 14% годовых по ставке сложных процентов и на этот период прогнозируется рост цен в 2,5 раза. Определить ставку процентов при выдаче кредита и наращенную сумму долга.

Решение:

По условию задачи $i=0,14;\ I_n=2,5;\ n=4.$

Ставка сложных процентов с учетом инфляции будет

$$i_\alpha = (1+i) \cdot \sqrt[n]{I_n} - 1 = (1+0{,}14)\sqrt[4]{25} - 1 = 1{,}14 \cdot 1{,}2574 - 1 \approx 0{,}4334 \qquad (43{,}34\%)$$

Наращенная сумма долга:

$$S = 150000 \cdot (1+0{,}4334)^4 = 150000 \cdot (1{,}4334)^4 = 150000 \cdot 4{,}222 = 633300 \ сом.$$

Номинальную ставку сложных процентов, с учетом инфляции определим формулой:

$$j_{\alpha} = m(1+\frac{j}{m})\cdot\sqrt[mn]{I_n} \qquad (2.3.6)$$

Формула (2.3.6) легко получается из следующей:

$$(1+\frac{j_{\alpha}}{m})^{mn} = (1+\frac{j}{m})^{mn}\cdot I_n$$

Пример 4: Капитал вкладывается на один год под номинальную ставку 50% при уровне инфляции 75%, начисление процентов – ежемесячное. Найти реальную доходность этой операции.

Решение:

Из условия задачи известно:

$n=1,\ m=12,\ \alpha=0,75,\ j=0,5$

$$I=1+\alpha=1+0,75=1,75.$$

Необходимо найти безинфляционную номинальную ставку сложных процентов. С целью оценки реальной доходности операции возьмем равенство вида:

$$(1+\frac{j_{\alpha}}{m})^{mn} = (1+\frac{j}{m})^{mn}\cdot I_n$$

из этого равенства определим j

$$j = m\left(\frac{1+\frac{j_{\alpha}}{m}}{\sqrt[mn]{I_n}}-1\right) = 12\cdot\left(\frac{1+\frac{0,5}{12}}{\sqrt[12]{1,75}}-1\right) = 12\cdot\left(\frac{1,04167}{1,00014}-1\right) = 12\cdot(1,0415241-1) =$$

$$= 12\cdot 0,0415241 = 0,4983 \qquad (49,83\%)$$

Здесь j_{α}=50%, а $j=49,83\%$, поэтому финансовая операция приносит реальную доходность.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть месячный темп инфляции 8%. Определить двухгодовой уровень инфляции.
2. Цены за каждый месяц растут на 12%. Определить двухгодовой уровень инфляции.
3. Пусть приросты цен по месяцам составили: 1,5; 1,2; 1,1; 1; 0,8 и 0,5. Определить индекс цен по формуле $I_p = \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{h_i}{100}\right)$ и темп инфляции.
4. Банк выдал клиенту кредит на четыре года в размере 150000 сом по ставке 8% годовых (сложные проценты). Уровень инфляции – 16% в год. Определить ставку процентов при выдаче кредита и наращенную сумму.
5. Определить реальную доходность кредитной операции, если уровень эффективности составлял 10% годовых, а годовой уровень инфляции 24%.
6. Вычислить реальную ставку при размещении средств на год, если уровень эффективности составляет 25% годовых, а годовой уровень инфляции – 20%.
7. Какой величины достигнет долг, равный 150000 сом, через пять лет, если проценты по сложной ставке 15,5% начисляются по квартально, а уровень инфляции 5% годовых.
8. Какой размер эффективной ставки, если номинальная ставка равна 25%, а уровень инфляции – 6%.
9. Кредит 60000 сом выдан на три года, на этот период прогнозируется рост цен в 2,5 раза. Определить ставку процентов при выдаче кредита и наращенную сумму долга, если реальная доходность составляет 12% годовых по ставке сложных процентов?
10. Коммерческий банк принимает вклады населения сроком на 120 дней при условии 10% годовых. Годовой ожидаемый уровень инфляции составляет 8%. Определить простую процентную ставку с учетом инфляции и коэффициент наращения, принять k=360 дней.
11. Фирма договорилась с банком о выделении кредита 10 млн. сом на год без учета инфляции. Ожидаемый уровень

инфляции составляет 10%. Определить процентную ставку с учетом инфляции, коэффициент наращения.

12. На сумму 135 000 сом начисляются сложные проценты в течение 3 лет по годовой процентной ставке 0,08%. Темп прироста инфляции 0,03% в год. Определить:
    а) Наращенную сумму без учета инфляции;
    б) Реально наращенную сумму с учетом инфляции;
    в) Брутто – ставку;
    г) Наращенную сумму по брутто - ставке.
13. Предполагается, что темп инфляции составит 20% в год. Какую ставку сложных процентов следует проставить в договоре, чтобы реальная доходность составляла 10%? Чему равна инфляционная премия?
14. Допустим, что месячный уровень инфляции составляет 5%. Банк предлагает клиентам вкладывать свои средства под 100% годовых. Определить годовой уровень инфляции и реальную годовую ставку.
15. В банк помещен вклад в сумме 4 млн. сом под 100% годовых сроком на пять лет. Ожидаемый в течение этого периода темп инфляции оценивается величиной 50% в год. Требуется найти реальную сумму, которую будет иметь клиент по истечению 5 лет.
16. Клиент планирует разместить в банк 150 000 сом сроком на два года под 30 % годовых. Прогноз темпа роста инфляции составляет 20% в год. Требуется определить реальную сумму денег, которую клиент сможет иметь через два года, и реальную годовую ставку процента.

2.4. Влияние инфляции на ставку процента

Пусть r – номинальный процент. После дисконтирования наращенная сумма S определяется в виде:

$$S = P \cdot \frac{1+r}{1+i} = P\left(1+\frac{r-i}{1+i}\right) \qquad (2.4.1)$$

Если величина инфляции невелика, то $1+i\approx 1$, тогда имеет место следующая формула:

$$S = P\cdot(1+r-i) \qquad (2.4.2)$$

В России последнего десятилетия, когда i менялось от тысяч до многих десятков процентов в год, то пользоваться формулой (2.4.2) нельзя.

Простейшая модель Фишера утверждает, что номинальный процент r связан с реальным процентом r_i с помощью формулы:

$$1+r=(1+r_i)(1+i) \qquad (2.4.3)$$

Таким образом, согласно этой модели норма процента полностью встроена в ценовой механизм.

Пример 1: В начале 1996 г. ожидаемая годовая инфляция в России находилась на уровне $i=50\%$. Годовой сертификат Сбербанка на сумму 250000 руб. давал доходность $r=75\%$. Подсчитать реальную доходность сертификата.

Решение:

Применяя формулу $r_1=\frac{r-i}{1+i}$ вычислим реальный доход. По условию упражнения известно $r=0,75$; $I=0,50$, тогда

$$r_1=\frac{0,75-0,50}{1+0,50}=\frac{0,35}{1,50}=0,2333$$

Таким образом, реальная доходность сертификата составляет 23,33%.

Пример 2: В рассматриваемый год ожидаем, что инфляция составит 35%. Какую номинальную годовую процентную ставку следует установить по вкладам в банке, чтобы реальная годовая ставка r_l равнялась 5%.

Решение:

Из формулы $1+r=(1+r_i)(1+i)$ найдем r:

$$1+r=1+i+r_i(1+i) \Rightarrow r=i+r_i\cdot(1+i)$$

Тогда номинальная годовая процентная ставка будет:

$$r=0{,}30+0.05\cdot(1+0{,}30)=0{,}30+0{,}05\cdot1{,}30=0{,}365$$

Таким образом, номинальная годовая процентная ставка составляет 36,5%.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В рассматриваемый год ожидаемая инфляция составит $i=25\%$. Какую номинальную процентную ставку следует установить по вкладам в банке, чтобы реальная ставка r равнялась 3%.
2. В рассматриваемый год ожидаемая инфляция составит $i=20\%$. Какова реальная доходность по вкладу в банк, если годовой процент по нему равен 32,5%.
3. Если в 2005 году, у нас в Республике, доходность по вкладам в банк составляло 36,5%, а годовая ставка процента была 5%, то какова была в рассматриваемый год инфляция?
4. Если в 2006 году ожидаемая инфляция составляла $i=30\%$, а номинальная годовая процентная ставка была 5%, то какова должна быть реальная ставка процентов?
5. В начале 2007 года ожидаемая годовая инфляция в Кыргызстане составляла на уровне $i=20\%$. Годовой сертификат Сбербанка на сумму 550000 сом давал номинальную доходность $r=85\%$ (это то, что было прямо написано на сертификате). Определить реальную доходность сертификата.

6. Годовой сертификат Сбербанка на сумму 450000 сом даст номинальную доходность, а реальная доходность сертификата – 28,5%. Определить в рассматриваемый год ожидаемую годовую инфляцию.

2.5. Влияние инфляции на инвестиционный проект

Ставится вопрос как повлияет ожидаемая инфляция на критерии принятия инвестиционных решений.

Если инфляция составляет $i\%$ в год, то цены ресурсов, используемых при реализации проекта в году t и цены, по которым реализуется произведенная в этом году продукция проекта, умножаются на множитель $(1+i)^t$. Поэтому, все члены потока платежей, порожденного инвестиционным проектом, должны быть умножены на этот множитель. Тогда, поток платежей, с учетом инфляции, можно представить в виде

$C_0 \quad C_1(1+i) \quad C_2(1+i)^2 \quad \ldots \quad C_n(1+i)^n$

$0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad n \quad t_{лет}$

где $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ – числа, равные потоку денежных средств за соответствующие интервалы времени.

Пример: Фирма выясняет возможность производства новой продукции. Чтобы запустить проект, понадобится потратить в начальный момент 160 тыс. сом. Во второй, третий и четвертые годы реализация новой продукции принесет доход в размерах 60 тыс. сом, 165 тыс. сом и 80 тыс. сом. В пятом году продукция перестанет быть популярной и доход упадет до 15 тыс. сом. Дальнейший выпуск продукции не предполагается. Определить среднюю норму прибыли на инвестиции и срок окупаемости, если инфляция составляет 12% в год.

Решение:

Определим поток платежей проекта с учетом инфляции 12% в год.

$$C_0 = -160$$

$$C_1 = -160 \cdot (1+0{,}12) = -160 \cdot 1{,}12 = -179{,}2$$

$$C_2 = 60 \cdot (1+0{,}12)^2 = 60 \cdot (1{,}12)^2 = 60 \cdot 1{,}2544 \approx 75{,}26$$

$$C_3 = 165 \cdot (1+0{,}12)^3 = 165 \cdot (1{,}12)^3 = 60 \cdot 1{,}404928 = 231{,}81312 \approx 231{,}81$$

$$C_4 = 80 \cdot (1+0{,}12)^4 = 80 \cdot (1{,}12)^4 = 80 \cdot 1{,}5735193 = 125{,}88154 \approx 125{,}88$$

$$C_5 = 15 \cdot (1+0{,}12)^5 = 15 \cdot (1{,}12)^5 = 15 \cdot 1{,}8735193 = 28{,}102789 \approx 28{,}103$$

Определенные нами потоки платежей изобразим на оси времени

-160	-179,2	75,24	231,81	125,88	28,103	
0	1	2	3	4	5	$t_{лет}$

Среднегодовая балансовая прибыль за пятилетний период реализации данного проекта равна:

$$\frac{75{,}24+231{,}81+125{,}88+28{,}103}{5} = \frac{461{,}033}{5} \approx 92{,}21 \text{ тыс.сом}$$

Инвестиции в данный проект равны: *160+179,2=339,2 тыс. сом*

Средняя норма прибыли на инвестиции равна:

$$\frac{92{,}21}{339{,}2} = 0{,}2718455 \approx 0{,}2718$$

Таким образом, средняя норма прибыли на инвестиции составляет *27,18%*.

Теперь определим период окупаемости проекта с учетом инфляции. Сумма инвестиции в данный проект равна *339,2 тыс. сом*. К концу второго года окупятся *75,26 тыс. сом* и останется *339,2-75,26=263,94 тыс. сом*, которые окупятся за часть третьего года, равную $\frac{263{,}94}{231{,}81} \approx 1{,}14$ *года.*

Следовательно, окупаемость всего проекта равна *2+1.14=3,14 года*

УПРАЖНЕНИЯ

1. Промышленная компания по производству подъемного оборудования решила построить новый цех для выпуска малых подъемников для универсалов. Проект предполагает вложение немедленно 450 тыс. сом в постройку здания цеха. В начале второго года необходимо вложить 300000 сом для закупки и установки оборудования, а в начале третьего года придется потратить 75000 сом на рекламу новой продукции. В третьем, четвертом, пятом и шестом годах реализация новой продукции принесет прибыль, соответственно равную 600000 сом, 90000 сом, 105000 сом и 300000 сом. После этого выпуск малых подъемников прекращается, так как спрос на них будет удовлетворен. Опишите поток платежей для инвестиционного проекта, если происходит инфляция, равная 5% в год.
2. Вычислите среднюю норму прибыли на инвестиции для проекта из упражнения 1.
3. Определите среднюю норму прибыли на инвестиции, если инфляция составляет 8% в год из упражнения 1.
4. Определите период окупаемости инвестиционного проекта, если происходит инфляция, равная 10%.

Глава III. ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ И ЕЕ СОВРЕМЕННАЯ ЦЕННОСТЬ

3.1. Поток денежных платежей

Поток платежей – это множество распределенных во времени выплат и поступлений.

Учтем направленность платежа, используя положительны величины для поступлений и соответственно отрицательные для выплат.

Потоки платежей являются неотъемлемой частью всевозможных сделок на финансовом рынке: кредитном, с ценными бумагами, а также при управлении финансами предприятий и осуществлении инвестиционных проектов и во многих других задачах экономической теории и практики.

Например, ежегодные выплаты процентов по облигациям, периодические вклады в банк для образования страхового фонда, ежемесячные выплаты долга по потребительскому кредиту, получение ежемесячной стипендии от благотворительного фонда и т.д. При всех таких платежах происходит начисление процентов на находящиеся в обороте деньги.

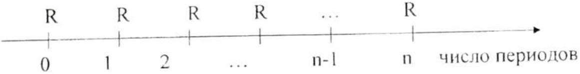
При изучении потока платежей могут возникнуть две основные задачи: найти наращенную сумму потока платежей и по известной наращенной сумме определить величину отдельного платежа.

Для частного вида потока платежей – финансовых рент – разработаны математические методы решения подобных задач.

3.2. Финансовые ренты. Функция $S_{n;i}$.

Последовательность платежей, производящихся через равные промежутки времени назовем финансовой рентой.

Например, вкладов в банк, каждый из которых равен R; периоды времени между платежами одинаковы, и в конце каждого из них на все сделанные до этого момента платежи начисляются сложные проценты по ставке i. Эту ренту можно представить на оси времени в виде:



Пусть делается n платежей. Платеж, сделанный в момент n, входит в наращенную сумму без изменения, т.е. в размере R. Сумма, наращенная к моменту n на платеж, сделанный в момент n-1, равна $R\cdot(1+i)$, а сумма, наращенная к моменту n на платеж, сделанный в момент времени n-2, равна $R\cdot(1+i)^2$, и т.д. продолжая, к моменту 2, наращенная сумма будет равной $R\cdot(1+i)^{n-2}$, а в момент 1 наращенная сумма будет равной $R\cdot(1+i)^{n-1}$.

Следовательно, наращенная сумма всей ренты в момент n будет равна:

$$S = R + R\cdot(1+i) + R\cdot(1+i)^2 + \ldots + R\cdot(1+i)^{n-2} + R\cdot(1+i)^{n-1}$$

Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии.

Известно, что сумма S_n первых n членов геометрической прогрессии определяются по формуле:

$$S_n = \frac{b_1\cdot(q^n-1)}{q-1} \qquad (3.2.1)$$

здесь $b_1=R$, $q=1+i$, n – число членов

Тогда наращенная сумма S будет равной:

$$S = R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i} \qquad (3.2.2)$$

Это и есть наращенная сумма финансовой ренты.

Обозначим выражение $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ через $S_{n;i}$, то есть

$$S_{n,i} = \frac{(1+i)^n-1}{i} \qquad (3.2.3)$$

Она называется коэффициентом наращенной ренты.

Тогда наращенная сумма финансовой ренты выражается формулой:

$$S = R \cdot S_{n;i} \qquad (3.2.4)$$

Для вычисления $S_{n;i}$ воспользуемся специальной таблицей. Практически для вычисления $S_{n;i}$ можно использовать финансовый калькулятор или программу Excel.

Пример 1: На счет в банке в течение пяти лет в конце каждого года будет вноситься сумма в размере 500 сом, на которые будут начисляться проценты по ставке 30%. Определить сумму процентов, которую банк выплатит владельцу счета.

Решение:

По условию задачи период ренты равен одному году, поэтому это годовая рента; проценты начисляются один раз в год; взносы будут в конце периода ренты.

В нашем примере $R=500,\ i=0,3,\ n=5$, поэтому S определяется в виде

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 500 \cdot \frac{(1+0,3)^5 - 1}{0,3} = 500 \cdot \frac{(1,3)^5 - 1}{0,3} = 4521,55\ сом$$

Сумма взносов в течение пяти лет составит: $P=n \cdot R= 5 \cdot 500=2500$ *сом.*

Следовательно, сумма начисленных процентов будет равной:

$$I = S - P = 4521,55 - 2500 = 2021,55\ сом$$

Рассмотренный нами пример можно решить поэтапно.

Расчет наращенной величины можно определить по следующей таблице.

Период	**Взносы**	**Проценты, начисленные за период**	**Наращенная сумма на конец периода**
1	500	-	500
2	500	150	1150
3	500	345	1995,00
4	500	598,50	3093,50
5	500	928,05	4521,55

Таким образом, получается такая же сумма, как и по формуле наращенной суммы финансовой ренты.

3.3. Вычисление платежей финансовой ренты

Иногда ставится задача по заданной наращенной сумме S определить величину платежа R. Зависимость между R и S определяется формулой:

$$S = R \cdot S_{n;i} \qquad \text{отсюда} \qquad R = \frac{S}{S_{n;i}} \tag{3.3.1}$$

где R – размер платежа

n – срок в годах

i – годовая ставка процентов

Пример 1: Господин Петров С.К. желает накопить за 5 лет 50000 сом, делая ежегодные равные вклады в банк, который выплачивает проценты по годовой ставке i =5% (сложных). Сколько он должен вкладывать каждый раз?

Решение:

Согласно условию задачи известно: $S=50000$ *сом*, $n=5$, $i=0,05$.

Вычислим $s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0,05)^5 - 1}{0,05} = \frac{1,2769815 - 1}{0,05} = \frac{0,2769815}{0,05} = 25,52$

$$R = \frac{S}{S_{n;i}} = \frac{50000}{25,52} = 1959,2476 \approx 1959,25 \text{ сом}$$

Следовательно, ежегодный вклад в банк господина Петрова должен быть равен 1959,25 сом.

3.4. Виды финансовых рент

Рассмотрим виды финансовых рент, которые встречаются в практике финансовых расчетов.

3.4.1. Ренты с начислением в конце года

Рассмотрим следующие виды финансовых рент:

1. Годовая рента

В данном виде рассматривается рента, платеж в которой равный R, выплачивается в конце каждого года, и в конце каждого года на накопленную сумму начисляются сложные проценты по ставке i. Наращенная за n лет сумма S и величина платежа R вычисляются по формулам:

$$S = R \cdot S_{n,i} \qquad (3.4.1.1)$$

$$R = \frac{S}{S_{n,i}} \qquad (3.4.1.2)$$

где

$$S_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (3.4.1.3)$$

2. *P-срочная* рента

Рассмотрим ренту, при которой p раз ежегодно через равные промежутки времени производятся платежи, равные R/p. На накопленную сумму начисляются сложные проценты по годовой ставке i.

Последний платеж в наращенную сумму входит в размере R/p.

На предпоследний платеж по годовой ставке i начисляются сложные проценты за период, равный $1/p$ части года, следовательно, в момент n наращенная сумма будет равна

$$\frac{R}{p}(1+i)^{\frac{1}{p}}$$

Аналогично, второй от конца платеж будет равен $\frac{R}{p}(1+i)^{\frac{2}{p}}$ и т.д.

В конце сумма, наращенная к моменту n на первый платеж будет равна $\frac{R}{p}(1+i)^{\frac{np-1}{p}}$

Тогда, наращенная сумма за n лет всей ренты будет равной

$$S=\frac{R}{p}+\frac{R}{p}(1+i)^{\frac{1}{p}}+\frac{R}{p}(1+i)^{\frac{2}{p}}+\ldots+\frac{R}{p}(1+i)^{\frac{np-1}{p}} \qquad (3.4.1.4)$$

Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии.

Первый член $b_1=\frac{R}{p}$, знаменатель $q=(1+i)^{\frac{1}{p}}$, число членов этой прогрессии равно $k=np$. Тогда сумма S по формуле суммы геометрической прогрессии представим в виде:

$$S=\frac{b_1\cdot(q^k-1)}{q-1}=\frac{R}{p}\cdot\frac{\left((1+i)^{\frac{1}{p}}\right)^{np}-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}=R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}$$

Введем обозначение: $S_{n;i}^{(p)}=\frac{(1+i)^n-1}{p\cdot\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}$ (3.4.1.5)

Тогда наращенная сумма *p-срочной* ренты равна:

$$S=R\cdot S_{n;i}^{(p)} \qquad (3.4.1.6)$$

Коэффициент $S_{n;i}^{(p)}$ представим в виде:

$$S_{n;i}^{(p)}=S_{n;i}\cdot K_{p;c} \qquad (3.4.1.7)$$

где $K_{p;c}=\frac{i}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}$; $\qquad S_{n;i}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$

Если рассмотрим ренту с периодом больше года, то наращенная за n лет сумма ренты определяется формулой:

$$S=R_r\cdot\frac{S_{n;i}}{S_{r;i}} \qquad (3.4.1.8)$$

где R_r – платеж, выплачиваемый один раз в 4 года ($r>1$)

$$S_{n,i}=\frac{(1+i)^n-1}{i} \qquad (3.4.1.9)$$

$$S_{r,i}=\frac{(1+i)^r-1}{i} \qquad (3.4.1.10)$$

Пример 1: Господин Сабиров решил ежегодно класть на свой счет в банке по 6000 сом, делая равные взносы ежеквартально. Какая сумма будет на его счету через три года, если банк начисляет на вклады 5% годовых (сложных)?

Решение:

Вклад господина Сабирова образует p-срочную ренту, в которой $R=6000$, $P=4$, $i=0,05$, $n=3$. тогда, согласно формуле (3.4.1.6), осуществляем вычисление:

$$S=6000\cdot S^{(4)}_{3;5\%} \qquad (3.4.1.11)$$

Коэффициент $S^{(4)}_{3;5\%}$ вычисляем по формуле

$$S^{(p)}_{n,i}=S_{n,i}\times K_{p,i} \qquad (3.4.1.12)$$

где $$K_{p,i}=\frac{i}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}; \qquad S_{n,i}\frac{(1+i)^n-1}{i} \qquad (3.4.1.13)$$

Вычислим: $S_{n,i}=\dfrac{(1+0,05)^3-1}{0,05}=\dfrac{(1,05)^3-1}{0,05}=\dfrac{0,157625}{0,05}=3,1525$

$$K_{p,i}=\frac{0,05}{4\left[(1,05)^{\frac{1}{4}}-1\right]}=\frac{0,05}{4\cdot 0,012272}=\frac{0,05}{0,0490884}\approx 1,01857$$

$S^{(4)}_{3;5}=3,1525\cdot 1,01857\approx 3,211104$

$S=6000\cdot 3,211104\approx 19266,26\ сом$

Пример 2: Акционерное общество по зерновым культурам образовало фонд развития, в который каждые 4 года отчисляет 1 млн. сом, вкладывая их в банк, начисляющей на вложенные деньги 8% годовых (сложных). Какая сумма будет в фонде через 10 лет?

Решение:

Взносы в фонд образуют ренту с периодом больше года. Член ренты $R_r = 1\,млн.сом$, $r = 4$, $i = 0{,}08$, $n = 10$. Для вычисления накопленной суммы S, воспользуемся формулой (3.4.1.8):

$$S_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0{,}08)^{10} - 1}{0{,}08} = \frac{(1{,}08)^{10} - 1}{0{,}08} = \frac{1{,}15812}{0{,}08} \approx 26{,}9866$$

$$S_{r;i} = \frac{(1+i)^r - 1}{i} = \frac{(1+0{,}08)^4 - 1}{0{,}08} = \frac{(1{,}08)^4 - 1}{0{,}08} = \frac{0{,}3605}{0{,}08} = 4{,}50625$$

$$\frac{S_{n;i}}{S_{r;i}} = \frac{26.9866}{4{,}50625} \approx 5{,}9887$$

Тогда, наращенная сумма будет: $S = 1000000 \cdot 5{,}9887 = 5988700\ сом.$

3.4.2. Ренты с начислением процентов *m* раз в год

Пусть платеж R осуществляется один раз в конце каждого года, а проценты начисляются m раз в год по ставке j_m, то есть по $\frac{j_m}{m}\%$.

Определим наращенную к моменту n сумму такой ренты.

В наращенную сумму последний платеж входит без изменений.

Предпоследний платеж делается за 1 год до момента n и на него начисляются сложные проценты m раз по ставке j_m, т.е. она равна:

$$R \cdot (1 + \frac{j_m}{m})^m .$$

Третий от конца делается за 2 года до момента n и наращенная сумма на этот платеж сумма в момент n равна

$$R\cdot(1+\frac{j_m}{m})^{2m}.$$

Таким образом продолжая этот процесс до первого платежа, имеем:

$$R\cdot(1+\frac{j_m}{m})^{(n-1)m}.$$

Тогда все наращенные суммы определяются в виде:

$$S=R+R(1+\frac{j_m}{m})^m+R(1+\frac{j_m}{m})^{2m}+...+R(1+\frac{j_m}{m})^{(n-2)m}+R(1+\frac{j_m}{m})^{(n-1)m} \qquad (3.4.2.1)$$

Умножим обе части этого равенства на $R\cdot(1+\frac{j_m}{m})^m$ и вычитая от первого последнее имеем:

$$S-S\cdot(1+\frac{j_m}{m})^m=R-R(1+\frac{j_m}{m})^{nm}$$

Отсюда
$$S=\frac{R\left[(1+\frac{j_m}{m})^{nm}-1\right]}{(1+\frac{j_m}{m})^m-1} \qquad (3.4.2.2)$$

Разделив числитель и знаменатель дроби (3.4.2.2) на $\frac{j_m}{m}$, получим

$$S=R\cdot\frac{S_{nm;j_m}}{S_{m;j_m}} \qquad (3.4.2.3)$$

где
$$S_{nm;j_m}=\frac{(1+\frac{j_m}{m})^{nm}-1}{\frac{j_m}{m}} \qquad (3.4.2.4)$$

$$S_{m;j_m}=\frac{(1+\frac{j_m}{m})^m-1}{\frac{j_m}{m}} \qquad (3.4.2.5)$$

Если ежегодно через равные промежутки времени платежи производятся p раз и каждый платеж равен R/p, а проценты начисляются m раз в году по ставке j_m, то вся наращенная на ренту сумма равна:

$$S = \frac{R}{P} + \frac{R}{P}(1 + \frac{J_m}{m})^{\frac{m}{p}} + \frac{R}{P}(1 + \frac{J_m}{m})^{\frac{2m}{p}} + \ldots + \frac{R}{P}(1 + \frac{J_m}{m})^{\frac{m(n-\frac{1}{p})}{p}} \qquad (3.4.2.6)$$

Слагаемые этой суммы являются членами геометрической прогрессии:

первый член: $b_1 = \frac{R}{P}$, знаменатель: $q = (1 + \frac{j_m}{m})^{m/p}$.

Тогда, согласно суммы первых n-членов геометрической прогрессии, имеем:

$$S = \frac{R}{P} \times \frac{S_{mn, j_m}}{S_{\frac{m}{p}, \frac{j_m}{m}}} \qquad (3.4.2.7)$$

где $$S_{mn, \frac{j_m}{m}} = \frac{(1 + \frac{j_m}{m})^{mn} - 1}{\frac{j_m}{m}} \qquad (3.4.2.8)$$

$$S_{\frac{m}{p}, \frac{j_m}{m}} = \frac{(1 + \frac{j_m}{m})^{\frac{m}{p}} - 1}{\frac{j_m}{m}} \qquad (3.4.2.9)$$

Пусть рента с периодом больше года, то члены ренты R_r, выплачиваются через каждые r лет ($r>1$). Проценты начисляются по ставке j_m через равные промежутки времени начисляются $\frac{j_m}{m}$%.

Мы должны определить всю наращенную сумму ренты.

Последний платеж входит в наращенную сумму в размере R_r. Проценты начисляются по ставке j_m m раз в год через равные промежутки времени начисляются $\frac{j_m}{m}$%.

Последний платеж входит в наращенную сумму в размере R_r.

Предпоследний платеж сделанный за r лет будет равным

$$R_r \cdot (1+\frac{j_m}{m})^{mr}$$

Второй от конца платеж сделанный за *2r* лет до момента *n* будет равным

$$R_r \cdot (1+\frac{j_m}{m})^{2mr}$$

Первый платеж за *n-r* лет до момента *n* будет равным:

$$R_r \cdot (1+\frac{j_m}{m})^{m(n-r)}.$$

Тогда, вся наращенная сумма ренты будет равной:

$$S = R_r + R_r(1+\frac{j_m}{m})^{mr} + R_r(1+\frac{j_m}{m})^{2mr} + ... + R_r(1+\frac{j_m}{m})^{m(n-r)}$$

Используя формулу суммы геометрической прогрессии получим

$$S = R_r \frac{(1+\frac{j_m}{m})^{mn} - 1}{(1+\frac{j_m}{m})^{mr} - 1} \qquad (3.4.2.10)$$

или

$$S = R_r \frac{S_{mn;\frac{j_m}{m}}}{S_{mr;\frac{j_m}{m}}} \qquad (3.4.2.11)$$

где

$$S_{mn;\frac{j_m}{m}} = \frac{(1+\frac{j_m}{m})^{mn} - 1}{\frac{j_m}{m}} \qquad (3.4.2.12)$$

$$S_{mr;\frac{j_m}{m}} = \frac{(1+\frac{j_m}{m})^{mr} - 1}{\frac{j_m}{m}} \qquad (3.4.2.13)$$

Таким образом, расчетная формула по определению рента с периодом больше года определяется формулой: (3.4.2.11)-(3.4.2.13).

$$S - S_{mr,\frac{j_m}{m}} = R_r \frac{S_{mn,\frac{j_m}{m}}}{S_{mr,\frac{j_m}{m}}} - \frac{(1+\frac{j_m}{m})^{mi}-1}{\frac{j_m}{m}}$$

Рассмотрим следующие примеры:

<u>Пример 1:</u> Для развития фирму ежегодно выделяют по 50 тыс. сом, которые вкладываются в банк, начисляющие сложные проценты по годовой ставке 10%. Определить сумму, накопленную фирмой через 5 лет, если взносы в фирме делаются в конце года, проценты которого начисляются по кварталам.

<u>Решение:</u>

Взносы образуют годовую ренту с начислением процентов по ставке $j_4=10\%$.

Заданы: $m=4$, $n=5$, $\frac{j_m}{m}=\frac{10}{4}=2{,}5\%$, определим наращенную сумму по формуле

$$S = R\cdot\frac{S_{mn;\frac{j_m}{m}}}{S_{mr;\frac{j_m}{m}}};\qquad где\ S_{mn;\frac{j_m}{m}} = \frac{(1+\frac{j_m}{m})^{mn}-1}{\frac{j_m}{m}}\qquad S_{m;\frac{j_m}{m}} = \frac{(1+\frac{j_m}{m})^{m}-1}{\frac{j_m}{m}}$$

Вычислим сначала $S_{mn;\frac{j_m}{m}}$ и $S_{m;\frac{j_m}{m}}$:

$$S_{20;2,5\%} = \frac{(1+0{,}025)^{20}-1}{0{,}025} = \frac{(1{,}025)^{20}-1}{0{,}025} = \frac{16386-1}{0{,}025} = \frac{0{,}6386}{0{,}025} \approx 25{,}544$$

$$S_{4;2,5\%} = \frac{(1+0{,}025)^{4}-1}{0{,}025} = \frac{(1{,}025)^{4}-1}{0{,}025} = \frac{1{,}1038-1}{0{,}025} = \frac{0{,}1038}{0{,}025} = 4{,}152.$$

Подставив эти значения в формулу наращенной суммы, имеем:

$$S = 50000 \cdot \frac{25,544}{4,152} = 50000 \cdot 6,152216 = 307610,8 \text{ сом.}$$

Пример 2: Для развития фирмы ежегодно выделяется по 50 тыс. сом, которые вкладываются в банк, начисляющие сложные проценты по годовой ставке 10%. Определить сумму, накопленную фирмой через 5 лет, если равные взносы в фирме делаются в конце каждого квартала, проценты начисляются по полугодиям.

Решение:

Взносы образуют *p-срочную* ренту с начислением процентов по ставке $j_2=10\%$, задано: $m=2$, $n=5$, $p=4$. Тогда наращенную сумму вычислим по формуле:

$$S = \frac{R}{P} \times \frac{S_{mn;j_m}}{S_{\frac{m}{p};\frac{j_m}{m}}} = \frac{50000}{4} \times \frac{S_{10;5\%}}{S_{0,5;5\%}} = 12500 \times \frac{S_{10;5\%}}{S_{0,5;5\%}}.$$

Но,

$$S_{10;5\%} = \frac{(1+0,05)^{10}-1}{0,05} = \frac{(1,05)^{10}-1}{0,05} = \frac{0,6289}{0,05} \approx 12,578$$

$$S_{0,5;5\%} = \frac{(1+0,05)^{\frac{1}{2}}-1}{0,05} = \frac{(1,05)^{\frac{1}{2}}-1}{0,05} = \frac{0,02470}{0,05} \approx 4,94.$$

Тогда $S = \frac{50000}{4} \cdot \frac{12,5779}{0,494} \approx 12500 \cdot 25,46134 = 318266,7$ *сом.*

Из этих двух примеров видно, что применение второго варианта более выгодно, так как наращенная сумма будет на 10655,9 сом больше, чем в первом варианте.

Пример 3: Для развития фирма в конце каждых двух лет кладет в банк 50 тыс. сом. Какая сумма будет на счете через 6 лет, если на деньги начисляются сложные проценты по ставке $j_4=12\%$.

Решение:

В этом случае, наращенную сумму находим по формуле: (3.4.2.11)-(3.4.2.13).

По условию примера $m=4$, $r=2$, $\frac{j_m}{m}=\frac{12}{4}=3\%$

$$S = R_r \frac{S_{mn;\frac{j_m}{m}}}{S_{mr;\frac{j_m}{m}}} = 50000 \cdot \frac{S_{24;3\%}}{S_{8;3\%}} \qquad (3.4.2.14)$$

Вычислим $S_{24;3\%}$ и $S_{8;3\%}$:

$$S_{24;3\%} = \frac{(1+0,03)^{24}-1}{0,03} = \frac{(1,03)^{24}-1}{0,03} = \frac{0,8064}{0,03} = 26,8680$$

$$S_{8;3\%} = \frac{(1+0,03)^{8}-1}{0,03} = \frac{(1,03)^{8}-1}{0,08} = \frac{0,26678}{0,03} \approx 8,8927.$$

Отсюда: $S = 50000 \cdot \frac{26,8680}{8.8927} \approx 50000 \cdot 3,021706 = 151085,5$ *сом.*

3.4.3. Ренты с непрерывным начислением процентов

Рассмотрим случай, когда сумма R выплачивается один раз в конце каждого года и на выплаченную сумму начисляется непрерывные проценты по ставке (силе роста) δ. Определим наращенную в момент n сумму этой ренты. Последний платеж входит в наращенную в момент n сумму без изменения.

В предпоследний платеж входит наращенная сумма Re^{δ}, продолжая этот процесс, имеем сумму, наращенную в момент n на первый платеж равный $Re^{(n-1)\delta}$.

Таким образом, наращенная сумма всей ренты будет равной:

$$S = R + \mathrm{Re}^{\delta} + \mathrm{Re}^{2\delta} + \ldots + \mathrm{Re}^{(n-2)\delta} + \mathrm{Re}^{(n-1)\delta}$$

По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии получаем:

$$S = R \cdot \frac{(e^{\delta})^{n}-1}{e^{\delta}-1} = R \cdot \frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta}-1} \qquad (3.4.3.1)$$

Пример 1: Для развития фирмы ежегодно выделяется по 50 тыс. сом, которые вкладываются в банк, начисляются сложные проценты по годовой ставке 10%. Определить сумму, накопленную фирмой через 5 лет, если взносы делаются в конце каждого года, проценты начисляются непрерывно.

Решение:

В этом случае, взносы образуют годовую ренту с непрерывным начислением процентов с силой роста $\delta=0,10$.

С помощью формулы (3.4.3.1) вычислим накопленную сумму при $\delta=0,10$; $n=5$; $R_r=50000$.

$$S = 50000 \cdot \frac{e^{5\delta}-1}{e^{\delta}-1} = 50000 \cdot \frac{e^{0.5}-1}{e^{0.1}-1}.$$

Если рассмотрим *p-срочную* ренту, то в этой ренте p раз в год выплачивается сумма $\frac{R}{p}$ и в конце года на все платежи начисляется непрерывная процентная ставка δ.

Проводя аналогичные рассуждения, как и в п. 3.4.1 получим формулу наращенной суммы ренты в виде:

$$S = \frac{R}{p} + \frac{R}{p} \cdot e^{\frac{\delta}{p}} + \frac{R}{p} \cdot e^{2\frac{\delta}{p}} + \ldots + \frac{R}{p} \cdot e^{\frac{(np-1)\delta}{p}}$$

По формуле суммы первых n членов геометрической прогрессии получаем формулу:

$$S = \frac{R}{p} \times \frac{e^{\delta n}-1}{e^{\frac{\delta}{p}}-1} \qquad (3.4.3.2)$$

Пример 2: Для развития фирмы ежегодно выделяется по 50 тыс. сом, которые вкладываются в банк, начисляющий сложные проценты по годовой ставке 10%. Определить сумму, накопленную фирмой через 5 лет, если равные взносы делаются в ежемесячно, проценты начисляются непрерывно.

Решение:

По условию примера ясно, что взносы образуют *p-срочную* ренту с непрерывным начислением процентов с силой роста $\delta=0,10$. вычисление осуществляем с помощью формулы (3.4.3.2):

$$S=\frac{50000}{12}\times\frac{e^{0,15}-1}{e^{\frac{0,1}{12}}-1}\approx\frac{12500}{3}\cdot\frac{e^{0,5}-1}{e^{0,0083}-1}=\frac{12500}{3}\cdot\frac{0,6487}{0,008394}=324324,17$$

Рассмотрим теперь случай, когда сумма равная R_r, выплачивается через каждые r лет ($r>1$). Непрерывные проценты начисляются ежегодно по ставке δ.

Проводя аналогичные рассуждения, как в п. 4.3.1, наращенную сумму *p-срочной* ренты представим в виде:

$$S=R_r+\mathrm{Re}_r^{\delta r}+R_r e^{2\delta r}+\ldots+R_r e^{(n-r)\delta}.$$

Слагаемые этой суммы представлены членами геометрической прогрессии с первым членом $b_1=R_r$, знаменателем $q=e^{\delta r}$ и членом членов $k=n/r$.

Определим по формуле суммы членов геометрической прогрессии

$$S=R_r\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta r}-1} \qquad (3.4.3.3)$$

Пример 3: Владелец автомастерской кладет в банк в конце каждых двух лет по 30 тыс. сом. Какая сумма будет на счету владельца мастерской через 6 лет, если банк выплачивает непрерывные проценты с силой роста $\delta=10\%$.

Решение:

По условию примера $\delta=10\%=0,1;\ n=6;\ r=2$.

Тогда по формуле (3.4.3.3), получим:

$$S = R_r \frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta}-1} = 30000 \cdot \frac{e^{0,6}-1}{e^{0,2}-1} = 30000 \cdot \frac{0,6076}{0,2214} \approx 82330.62$$

Таким образом, через 6 лет владелец мастерской на своем счету имеет 82330 тыс. сом.

3.4.4. Погашение долгосрочной задолженности единовременным платежом

Рассмотрим задачу погашения долгосрочной задолженности единовременным платежом.

Иванов взял ссуду равную S сом, которую должен вернуть через n лет. Он, договаривался с кредитором о том, что ежегодно должен выплачивать кредитору проценты по ставке q. Иванов с целью накопить к моменту возвращения долга необходимую сумму одновременно создает погасительный (амортизационный или страховой) фонд, в который осуществляет ежегодные взносы. На деньги, находящиеся в фонде, Иванов получает $i\%$ в год. Необходимо определить суммарные ежегодные его затраты α?

Срочная уплата α состоит из суммы выплачиваемых на долг процентов Sq и взносов в страховой фонд R. Взносы R являются членами годовой ренты, состоящей из n членов, поэтому наращенная сумма определяется по формуле:

$$R = \frac{S}{S_{n\,i}} \qquad (3.4.4.1)$$

Тогда, срочная уплата будет равной:

$$\alpha = Sq + \frac{S}{S_{n\,i}} = S \cdot \frac{q \cdot S_{n\,i} + 1}{S_{n\,i}} \qquad (3.4.4.2)$$

Пример: Фермерское хозяйство по животноводству получило кредит в размере 450000 сом в банке под 6% годовых на 5 лет. Одновременно с получением ссуды для ее погашения создан страховой фонд, в который делаются равные ежегодные взносы. На деньги, внесенные в фонд, выплачиваются 5% годовых. Определить ежегодную уплату по долгу.

Решение:

Известно, что $S=450000$; $q=0{,}06$; $n=5$; $i=0{,}05$. Найдем $S_{5;5\%}$:

$S_{n;i}$ определяется формулой:

$$S_{n;i}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$S_{5;5\%}=\frac{(1+0{,}05)^5-1}{0{,}05}=\frac{(1{,}05)^5-1}{0{,}05}\approx\frac{0{,}27628}{0{,}05}\approx 5{,}5256$$

Тогда, величина срочной уплаты будет:

$$\alpha=450000\cdot 0{,}06+\frac{450000}{5.5256}\approx 27000+81439{,}12=108439{,}12\ \text{сом.}$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Торговая фирма вкладывает 150000 сом в конце каждого года в банк, выплачивающий проценты по ставке 8% годовых (сложных). Какая сумма будет на счету фирмы:

   а) через 2 года; б) через 5 лет.

2. Сельскохозяйственное предприятие вкладывает 15000 сом в конце каждого квартала и банк выплачивает проценты по ставке $j_n=5\%$ годовых (сложных). Какая сумма будет на счету сельскохозяйственного предприятия

   а) через 2 года; б) через 3 года; в) через 5 лет.

3. Фермер хочет накопить за 5 лет 180000 сом для покупки трактора, делая ежегодные равные вклады в банк, который выплачивает проценты по ставке $i=8\%$ годовых (сложных). Какую сумму ежегодно должен фермер вкладывать в банк?

4. Решите упражнение 3 в предположении, что фермер делает ежемесячные вклады в банк, который выплачивает проценты по ставке $j_{12}=5\%$.

5. Господин Акматов решил ежегодно класть на свой счет в банке по 12000 сом, делая равные взносы ежемесячно. Какая сумма будет на его счету через 4 года, если банк начисляет на вклады 5% годовых (сложных)?

6. Акционерное общество овощеводства образовало фонд развития, в который каждые 5 лет отчисляет 1200000 сом, вкладывая их в банк, начисляющий на вложенные деньги 10% годовых (сложных). Какая сумма будет в фонде через 10 лет?

7. Акционерное общество по производству автомобильных запчастей образовало фонд для совершенствования производства запчастей, вкладывая в него ежегодно 200000 сом. При этом оно делает ежеквартально равные вклады в банк, который выплачивает 6% годовых (сложных). Какая сумма будет на счету АО через 5 лет?

8. Университет создает фонд (по контрактным суммам) с целью совершенствования инновационных технологий университета, вкладывая в него каждые 2 года 3 млн. сом. Деньги кладутся в банк, выплачивающий 5% годовых (сложных). Какая сумма будет в фонде через 8 лет?

9. Банк выплачивает на вложенные в него деньги проценты по ставке $j_4=3\%$. Клиент вкладывает в этот банк ежегодно 2000 сом, делая равные вклады в конце каждого квартала. Какая сумма будет на счету через 5 лет 6 месяцев?

10. Владелец телемастерской вкладывает каждые 2 года по 20 тыс. сом в банк. На вложенные деньги банк начисляет непрерывные проценты по ставке (силе роста) $\delta=5\%$, накапливая деньги для покупки современного оборудования. Какую сумму он накопит за 6 лет?

11. Банк на вложенные в него деньги начисляет непрерывные проценты по ставке (силе роста) $\delta=5\%$. Клиент вкладывает в этот банк в конце каждого года 2500 сом. Какая сумма будет на его счету через 6 лет 6 месяцев?

12. Фермер по животноводству взял в банке 150 тыс. сом под 12% годовых на 5 лет. Для погашения долга он образовал страховой фонд, внося в него равные ежегодные взносы и получая на эти деньги 10% годовых. Найдите ежегодную срочную уплату по долгу.

13. Решите упражнение 12 при условии, что на деньги, вкладываемые в страховой фонд, начисляются 8% годовых.

14. Какова ежегодная срочная уплата владельца магазина, если владелец магазина получил в банке ссуду 500 тыс. сом сроком на 3 года. Банк за ссуженные деньги взимает 10% в год. Одновременно владелец магазина создал страховой фонд для погашения ссуды, внося в него равные ежегодные взносы и получая на эти деньги проценты по ставке $j_4=8\%$.

15. Для развития фирма в конце каждых двух лет кладет в банк 42 тыс. сом. Какая сумма окажется на счете фирмы через 4 года, если на деньги начисляются сложные проценты по ставке $j_4=10\%$.

16. Для развития фирма ежегодно выделяет по 64 тыс. сом, которые вкладываются в банк, начисляющий сложные проценты по годовой ставке 8%. Определить сумму накопленную фирмой через 4 года, если равные взносы фирмой делаются в конце каждого квартала. Проценты начисляются по полугодиям.

3.5 СОВРЕМЕННАЯ ЦЕННОСТЬ ФИНАНСОВАЯ РЕНТЫ

3.5.1 Современная величина финансовой ренты. Функция $a_{n,i}$

Современная величина потока платежей – эта сумма платежей, дисконтированных на момент начала ренты по ставке начисляемых сложных процентов. Эта важнейшая характеристика финансового анализа, так как является основной для измерения эффективности различных финансово-кредитных операций, сравнения условий контрактов и т.п. Данная характеристика показывает, какую сумму следовало бы иметь первоначально, чтобы, разбив её на равные взносы, на которые начислялись бы установленные проценты в течение всего срока, можно было бы получить указанную наращенную сумму.

Рассмотрим ренту, состоящую из n – платежей, каждый из которых равен R и осуществляется в конце каждого периода начисления процентов.

Пусть каждый раз начисляются сложные проценты по ставке i. Тогда наращенная сумма определяется формулой:

$$S = RS_{n,i} \qquad (3.5.1.1)$$

где $S_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Современная ценность ренты равна современной ценности ее наращенной суммы и она определяется формулой

$$P = S\cdot(1+i)^{-n} = R\cdot S_{n,i}(1+i)^{-n} = R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (3.5.1.2)$$

Введем обозначение: $$a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (3.5.1.3)$$

и оно называется коэффициентом приведения ренты.

Тогда $P = R\cdot a_{n,i}$

(3.5.1.4)

Пример 1: На счет в банке в течение пяти лет в конце каждого года вносится сумма в размере 20000 сом, на которое будет начисляться процент по ставке 15%. Определите современную величину ренты.

Решение:

По условию упражнения $n=5;\ i=0.15;$ R=20 000. Тогда современная величина ренты будет:

$$P = 20000\cdot\frac{1-(1+0.15)^{-5}}{0.15} = 20000\cdot\frac{(1.15)^5-1}{0.15\cdot(1.15)^5} = 20000\cdot\frac{1.7507-1}{0.15\cdot 1.7507} = 20000\cdot\frac{0.7507}{0.2626} =$$

$$= 20000\cdot 2.85872048 = 57174.4 \text{ сом}$$

Таким образом, все производимые в будущем платежи оцениваются в настоящий момент в размере 57174,4 сом.

3.5.2. Современная ценность различных рент

1. Современную ценность годовой ренты можно определить по формуле (3.5.1.2)-(3.5.1.4)

Пусть современная ценность ренты p-раз ежегодно через равные промежутки времени производятся платежи, равные R/p. Для нахождения современной ценности p этой ренты, используем известные нам следующие формулы:

$$P = S\cdot(1+i)^{-n} \quad \text{и} \quad S = R\cdot S_{n,i}^{(p)}$$

Из этих двух формул, имеем:

$$P = R\cdot(1+i)^{-n},\ S_{n,i}^{(p)} = R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}\cdot(1+i)^{-n} = R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}$$

Введем обозначение

$$a_{n,i}^{(p)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}$$

Тогда формула для P принимает вид:

$$P = R \cdot a_{n;i}^{(p)}$$

(3.5.2.1)

Коэффициент $a_{n;i}^{(p)}$ представлен в виде:

$$a_{n;i}^{(p)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \times \frac{i}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]} = a_{n;i} \cdot K_{p;i}$$

$$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (3.5.2.2)$$

$$K_{p;i} = \frac{i}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]} \qquad (3.5.2.3)$$

Пример 1: Какую сумму необходимо положить в банк, чтобы в течение следующих 10 лет ежегодно получать 12000 сом, полностью исчерпав счет к концу этого срока. Деньги будут сниматься каждые 2 месяца равными частями. Банк начисляет на находящиеся на счету деньги проценты по ставке i=5% годовых.

Решение:

Проценты начисляется только в конце года. Современная ценность p-срочной ренты $p=6$. Известно, что $n=10$, $i=5\%$, $p=6$.

$$P = R \cdot a_{n;i}^{(p)} = 12000 \cdot a_{10;5\%}^{(6)}$$

Значение $a_{10;5\%}^{(6)}$ вычислим на основании формул (3.5.2.1)-(3.5.2.3)

$$a_{10;5\%} = \frac{1-(1+0{,}05)^{-10}}{0{,}05} = \frac{(1{,}05)^{10}-1}{0{,}05 \cdot (1{,}05)^{10}} = \frac{1.6289-1}{0{,}05 \cdot 1{,}6289} = \frac{0{,}6289}{0{,}081445} \approx 7{,}7218$$

$$K_{6;5\%} = \frac{0{,}05}{6\left[(1{,}05)^{\frac{1}{6}}-1\right]} = 1{,}020635696$$

$$P = 12000 \cdot 7{,}7218 \cdot 1{,}020636 \approx 94573{,}76 \text{ сом}$$

Рассмотрим теперь случай, когда рента имеет период больше года, т.е. платеж, равный R_r, выплачивается один раз в r лет (r>1). Сложные проценты по годовой ставке i начисляется ежегодно. Используя формулы:

$$P = S(1+i)^{-n} \text{ и } S = R_r \frac{S_{n,i}}{S_{r,i}}$$

Современную ценность этой ренты определим в виде:

$$P = R_r \frac{a_{n,i}}{S_{r,i}} \qquad (3.5.2.4)$$

где $$a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i};$$

$$S_{r,i} = \frac{(1+i)^r - 1}{i} \qquad (3.5.2.5)$$

Пример 2: Какую сумму надо положить в банк, чтобы в течение 10 лет иметь возможность каждые 2 года снимать со счета 20000 сом, исчерпать к концу этого срока вложенные деньги. Банк начисляет на находящиеся на счету деньги проценты по ставке i=5% годовых (сложных).

Решение:

Определим современную ценность ренты с периодом больше года. Проценты начисляются в конце каждого года. Задано $r=2$, $n=10$, $i=5\%$.

Согласно формулы (3.5.2.5), вычислим $a_{n,i}$, $S_{r,i}$

$$a_{n,i} = a_{10,5\%} = \frac{1-(1+0{,}05)^{-10}}{0{,}05} = \frac{0{,}6289}{0{,}081445} \approx 7{,}7218$$

$$S_{2,5\%} = \frac{(1+0{,}05)^2 - 1}{0{,}05} = \frac{(1{,}05)^2 - 1}{0{,}05} = \frac{0{,}1025}{0{,}05} = 2{,}05$$

Тогда $P = 20000 \cdot \dfrac{a_{10,5\%}}{S_{2,0.05}} = 20000 \cdot \dfrac{7{,}7218}{2{,}05} \approx 20000 \cdot 3{,}76673 \approx 75334{,}63\ сом$

3.5.3 Современная ценность ренты с непрерывным начислением процентов

Возьмем формулу дисконтирования капитала при непрерывном начислении процентов.

$$P = Se^{-\delta n} \qquad (3.5.3.1)$$

и применим её к наращенной сумме

$$S = R \cdot \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1} \qquad (3.5.3.2)$$

Тогда получим формулу для определения современной ценности непрерывной ренты.

$$P = R \cdot \frac{1 - e^{\delta n}}{e^{\delta} - 1} = R \cdot a_{n,\delta} \qquad (3.5.3.3)$$

Пример 1: Пусть годовая рента характеризуется параметрами: $R=50000$ *сом*, $n=5$. При дисконтировании по сложной ставке, равной 18,5% годовых и с непрерывной ставкой $\delta = 5\%$ годовых.

Определить современную стоимость непрерывной ренты?

Решение:

$$P = 50000 \cdot \frac{1 - e^{-0,05 \cdot 5}}{e^{0,05} - 1} = 50000 \cdot \frac{1 - e^{-0,25}}{e^{0,05} - 1} = 5000 \cdot \frac{1 - 0,784017}{1,05127 - 1} = 5000 \cdot \frac{0,215983}{0,05127} =$$
$$= 5000 \cdot 4,21266 = 210633$$

Рассмотрим задачи об определении современной ценности для p-срочной ренты. Возьмем формулу $p = Se^{-\delta n}$ и применим эту формулу к наращенной сумме.

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1}$$

Тогда имеем:

$$P = \frac{R}{p} \times \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1} \qquad (3.5.3.4)$$

Определим формулу современной ценности ренты с периодом больше года. С этой целью возьмем формулу: $p = Se^{-\delta n}$ и применяя ее к наращенной сумме из формулы

$$S = R_r \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta r} - 1},$$

имеем

$$p = R_r \cdot \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\delta r} - 1} \qquad (3.5.3.5)$$

<u>Пример 2:</u> Какую сумму необходимо положить в банк, чтобы в течение следующих 10 лет ежегодно получать 10000 сом, полностью исчерпав счет к концу этого срока. Деньги будут сниматься каждые 2 месяца равными частями. Банк начисляет на находящиеся на счету деньги проценты по непрерывной ставке $\delta = 10\%$ годовых.

<u>Решение:</u>

Известно, что n=10, p=6, $\delta = 0.10$, тогда по формуле (3.5.3.5), имеем:

$$P = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\frac{\delta}{p}} - 1} = \frac{10000}{6} \cdot \frac{1 - e^{-0.1 \cdot 10}}{e^{\frac{0.1}{6}} - 1} \approx \frac{5000}{3} \cdot \frac{1 - e^{-1}}{e^{0.02} - 1} = \frac{5000}{3} \cdot \frac{1 - 0,367861}{1,020201 - 1} \approx 52154,1$$

<u>Пример 3:</u> Фермерское хозяйство по зерновым культурам какую сумму должно положить в банк, чтобы в течение следующих 6 лет иметь возможность каждые 2 года снимать со счета 12000 сом, исчерпав к концу этого срока вложенные деньги. Банк начисляет на находящиеся на счету деньги проценты по ставке:

а) годовой $i=3\%$,

б) $j_4 = 10\%$,

в) непрерывной $\delta = 5\%$.

<u>Решение:</u>

Согласно условию упражнения во всех случаях определим современную ценность ренты с периодом больше года.

а) В данном случае $r=2$, $n=6$, $i=8\%$

$$P = R_r \frac{a_{n,i}}{S_{r,i}} = 12000 \cdot \frac{a_{6,3\%}}{S_{2,3\%}}$$

Вычислим $a_{6,3\%}$ и $S_{2,3\%}$:

Значение этих определим с помощью таблицы $a_{6,3\%} = 5.417191444$ $S_{2,3\%} = 2,03$

Таким образом: $P = 12000 \cdot \frac{5,417191444}{2,03} = 12000 \cdot 2,6685671 = 32022,805$ *сом*

Значение $a_{6,3\%}$ и $S_{2,3\%}$ можно вычислить непосредственно согласно формулой.

б) Проценты начисляются 4 раза в год.

Современную ценность ренты находки по формуле $p = R_r \cdot \frac{a_{mn, \frac{j_m}{m}}}{S_{mr, \frac{j_m}{m}}}$

где r=2, n=6, m=4, $jm/m = 10\%/4 = 2.5\%$

$$a_{24,2,5\%} = \frac{1-(1+0,025)^{-24}}{0,025} = \frac{(1,025)^{24}-1}{(1,025)^{24} \cdot 0,025} = \frac{0,2517157}{0,031293} \approx 8,043834$$

$$S_{mrj\frac{jm}{m}} = S_{8,2,5\%} = \frac{(1+0,025)^8-1}{0.031293} = \frac{0,07771}{0,031293} \approx 2,483303$$

$$\frac{a_{24,2,5\%}}{S_{8,2,5\%}} = \frac{8,043834}{2,483303} \approx 3,2391673 \quad P = 12000 \cdot 3.2391673 = 38870,007 \text{ сом}$$

в) В этом случае проценты начисляются непрерывно с силой роста $\delta = 5\% = 0.05$ Современную ценность ренты вычисляем по формуле:

$p = R_r \cdot \frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta r}-1}$ при n=6, r=2, $\delta = 0.005$ тогда $p = 12000 \cdot \frac{1-e^{-0.3}}{e^{0.1}-1} = 31035,72$

3.5.4 Ренты с начислением процентов m раз в год

Если начисление процентов производится по ставке j_m в
чение n, то имеет место формула вида:

$$P = S(1+\frac{j_m}{m})^{-nm} \qquad (3.5.4.1)$$

Если платеж R делается один раз в конце каждого года, а
роценты начисляется m раз в год по ставке j_m, то есть по $j_m/m\%$ то
ля вычисления наращенной суммы, имеем:

$$S = R\cdot\frac{S_{mn,\frac{jm}{m}}}{S_{m,\frac{jm}{m}}} \qquad (3.5.4.2)$$

где $$S_{m,\frac{jm}{m}} = \frac{(1+\frac{jm}{m})^{m}-1}{\frac{jm}{m}} \qquad (3.5.4.3)$$

Из формулы (3.5.4.1)-(3.5.4.3), получим:

$$P = S(1+\frac{jm}{m})^{-nm} = R\frac{(1+\frac{jm}{m})^{nm}-1}{(1+\frac{jm}{m})^{m}-1}\cdot(1+\frac{jm}{m})^{-nm} = R\frac{1-(1+\frac{jm}{m})^{-nm}}{(1+\frac{jm}{m})^{m}-1} = R\cdot\frac{a_{mnj\frac{jm}{m}}}{S_{mj\frac{jm}{m}}} \qquad (3.5.4.4)$$

где

$$S_{nm,\frac{j_m}{m}} = \frac{(1+\frac{j_m}{m})^{nm}-1}{\frac{J_m}{m}} \qquad (3.5.4.5)$$

$$S_{m,\frac{j_m}{m}} = \frac{(1+\frac{j_m}{m})^{m}-1}{\frac{j_m}{m}}$$

Рассмотрим теперь p-срочную ренту. На основании формул (3.5.4.1) и $S = \frac{R}{p} \times \frac{S_{mn, \frac{j_m}{m}}}{S_{\frac{m}{p}, \frac{j_m}{m}}}$

Имеем: $$P = S \cdot (1 + \frac{j_m}{m})^{-mn} = \frac{R}{p} \cdot \frac{S_{mn, \frac{j_m}{m}}}{S_{\frac{m}{p}, \frac{j_m}{m}}} = \frac{R}{p} \times \frac{1-(1+\frac{j_m}{m})^{-mn}}{(1+\frac{j_m}{m})^{\frac{m}{p}} - 1} = \frac{R}{p} \times \frac{a_{mn, \frac{j_m}{m}}}{S_{\frac{m}{p}, \frac{j_m}{m}}} \qquad (3.5.4.6)$$

где $$a_{mn, \frac{j_m}{m}} = \frac{1-(1+\frac{j_m}{m})^{-mn}}{\frac{j_m}{m}} \qquad (3.5.4.7)$$

$$S_{\frac{m}{p}, \frac{j_m}{m}} = \frac{(1+\frac{j_m}{m})^{\frac{m}{p}} - 1}{\frac{j_m}{m}} \qquad (3.5.4.8)$$

Если в случае p–срочной ренты $p=m$, то

$$S_{1, \frac{j_m}{m}} = 1 \text{ и } P = R \frac{a_{mn, \frac{j_m}{m}}}{m} \qquad (3.5.4.9)$$

Срочная рента при наличии процентов один раз в год:

$$P = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{p \cdot \left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right]} \qquad (3.5.4.10)$$

Пример 1: Какую сумму необходимо положить в банк, чтобы в течение следующих 10 лет ежегодно получать 10000 сом, полностью исчерпать счет к концу этого срока. Деньги будут сниматься равными частями. Банк начисляет на находящиеся на счету деньги проценты по ставке $j=5\%$ годовых.

Решение:

Известно, что $n=10$, $m=4$, $j_m = 5\%$ $p=4$.

$$P = \frac{10000}{4} \times \frac{a_{40, 1.25\%}}{4} = 25000 \cdot \frac{a_{40, 1.25\%}}{4} = 6250 \cdot a_{40, 1.25\%}$$

$$a_{40, 1.25\%} = \frac{1-(1+0.0125)^{-40}}{0.0125} = 31,3269$$

Тогда современная ценность ренты будет: $P = 10000 \times 31.329 = 3132900$ сом.

Рассмотрим теперь случай, когда современная ценность ренты больше года, тогда для определения современной ценности применяем формулу $P = S \cdot (1 + \frac{jm}{m})^{-nm}$ к наращенной сумме S определенной в виде:

$$S = R_r \cdot \frac{S_{nm, \frac{j_m}{m}}}{S_{mr, \frac{j_m}{m}}}$$

Тогда $$p = R_r \cdot (1 + \frac{j_m}{m})^{-nm} \cdot \frac{S_{nm, \frac{j_m}{m}}}{S_{mr, \frac{j_m}{m}}} = R_r \frac{\frac{(1 + \frac{j_m}{m})^{mn} - 1}{m}}{(1 + \frac{j_m}{m})^{mr} - 1} \cdot (1 + \frac{j_m}{m})^{-nm} = R_r \frac{\frac{1 - (1 + \frac{j_m}{m})^{-nm}}{m}}{(1 + \frac{j_m}{m})^{mr} - 1}$$

Если введем обозначение:

$$a_{nm, \frac{j_m}{m}} = \frac{\frac{1 - (1 + \frac{j_m}{m})^{-nm}}{m}}{\frac{j_m}{m}} \qquad S_{mr, \frac{j_m}{m}} = \frac{\frac{(1 + \frac{j_m}{m})^{mr} - 1}{m}}{\frac{j_m}{m}}$$

Тогда:

$$P = R_r \frac{a_{nm, \frac{j_m}{m}}}{S_{mr, \frac{j_m}{m}}} \qquad (3.5.4.11)$$

<u>Пример 2:</u> Для развития фирма в конце каждых двух лет кладет в банк 50000 тысяч сом. Какая сумма в счете фирмы окажется через 6 лет, если на деньги начисляются сложные проценты по ставке $j_4 = 12\%$

<u>Решение:</u>

$m = 4$, $r = 2$, $\frac{j_m}{m} = 12\%/4\% = 3\%$

$$R_r = 50000 \cdot \frac{1 - (1 + 0{,}003)^{-24}}{(1 + 0{,}003)^{8} - 1} = 50000 \cdot \frac{(1{,}03)^{24} - 1}{(1{,}03)^{24}\left((1{,}03)^{8} - 1\right)} = 50000 \cdot \frac{1{,}80604 - 1}{(1{,}26675 - 1) \cdot 1{,}80604} =$$

$$= \frac{0{,}80604}{1{,}80604 \cdot 0{,}26675} = 50000 \cdot \frac{0{,}80604}{0{,}48176} = 50000 \cdot 1{,}673115 = 83655{,}75 \text{ сом}$$

3.5.5 Вечная рента

В предыдущих параграфах рассмотрены финансовые ренты с конечным числом членов. Если финансовая рента состоит из суммы с бесконечным числом членов, то такую ренту мы назовем вечной рентой.

Рассмотрим годовую ренту с начислением процентов в конце каждого года по ставке сложных процентов, равной i, в этом случае современная ценность конечной ренты определяется формулой:

$$p = Ra_{n;i} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Переходим к пределу при $n \to \infty$; тогда получим,

$$P_{\infty} = \lim_{n\to\infty} \qquad P = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\cdot R = \frac{R}{i} \qquad \text{т.е.}$$

$$P_{\infty} = \frac{R}{i} \qquad (3.5.5.1)$$

это и есть современная ценность вечной ренты.

Рассмотрим случай p-срочной ренты с начислением процентов в конце года по ставке сложных процентов, равной i.

Если переходим к обеим частям в формуле:

$$P = R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]} \text{ при } n\to\infty \text{, то получим}$$

$$P_{\infty} = \lim_{n\to\infty} \qquad P_{\infty} = R\lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]} = \frac{R}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]},$$

но $p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right] = \frac{i}{K_{p;i}}$,

поэтому современная ценность вечной ренты определяется формулой:

$$P_{\infty} = R\cdot\frac{K_{p;i}}{i} \qquad (3.5.5.2)$$

Определим современную ценность вечной ренты с периодом больше года и начислением процентов в конце каждого года по ставке сложных процентов, равной и с этой целью возьмем формулу:

$$P = R_r \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^r - 1}$$ и переходя к пределу при $n \to \infty$ найдем

$$P_\infty = R_r \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^r - 1} = R_r \cdot \frac{1}{(1+i)^r - 1}\ ,$$ но $(1+i)^r - 1 = i \cdot S_{r,i}$

Поэтому

$$P_\infty = \frac{R_r}{i \times S_{r,i}} \qquad (3.5.5.3)$$

Это и есть формула для определения современной ценности вечной ренты с периодом больше года. Теперь рассмотрим случай современной ценности годовой ренты с начислением процентов m раз в год по ставке j_m. Для вывода соответствующей формулы возьмем известную нам формулу:

$$P = R \cdot \frac{1-(1+\frac{j_m}{m})^{-nm}}{(1+\frac{j_m}{m})^m - 1}$$ и переходим к пределу при $n \to \infty$, получим

$$P_\infty = R \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+\frac{j_m}{m})^{-nm}}{(1+\frac{j_m}{m})^m - 1} = \frac{R}{(1+\frac{j_m}{m})^m - 1}\ ,$$

но $(1+\frac{j_m}{m})^m - 1 = \frac{j_m}{m} \times S_{m,\frac{j_m}{m}}$,

поэтому $$P_\infty = \frac{R}{\frac{j_m}{m} \times S_{m,\frac{j_m}{m}}} \qquad (3.5.5.4)$$

Для определения современная ценность вечной ренты p-срочная рента с начислением процентов m раз в год по ставке j_m. Возьмем известную формулу:

$P=\frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+\frac{j_m}{m})^{-mn}}{(1+\frac{j_m}{m})^{\frac{m}{p}}-1}$ и переходя к пределу при $n\to\infty$, получим:

$$P=\frac{R}{p}\cdot\frac{1}{(1+\frac{j_m}{m})^{\frac{m}{p}}-1} \qquad (3.5.5.5)$$

Но $(1+\frac{j_m}{m})^{\frac{m}{p}}-1=\frac{j_m}{m}\times S_{\frac{m}{p};\frac{j_m}{m}}$ поэтому формула вечной ренты в этом случае представляется в виде:

$$P_{\infty}=\frac{R}{p}\cdot\frac{1}{\frac{j_m}{m}\times S_{\frac{m}{p};\frac{j_m}{m}}} \qquad (3.5.5.6)$$

В частном случае, если m=p, то $S_{1;\frac{j_m}{m}}=1$

Тогда формула в этом частом случае принимает вид:

$$P_{\infty}=\frac{R}{j_m} \qquad (3.5.5.7)$$

Рассмотрим случай рента с периодом больше года с начислением процентов m раз в году по ставке j_m.

Для определения современной ценности вечной ренты в этом случае возьмем известную нами формулу:

$$P=R_r\cdot\frac{1-(1+\frac{j_m}{m})^{-mn}}{(1+\frac{j_m}{m})^{mr}-1}$$

И переходим к пределу при $n\to\infty$, имеем:

$$P_r=R_r\lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+\frac{j_m}{m})^{-mn}}{(1+\frac{j_m}{m})^{mr}-1}=R_r\cdot\frac{1}{(1+\frac{j_m}{m})^{mr}-1} \qquad (3.5.5.8)$$

Нетрудно убедиться, что

$$(1+\frac{j_m}{m})^{mr}-1=\frac{j_m}{m}\times S_{mr,\frac{j_m}{m}} \tag{3.5.5.9}$$

Таким образом, расчетная формула имеет вид

$$P_{\infty}=\frac{R}{\frac{j_m}{m}\cdot S_{mr,\frac{j_m}{m}}} \tag{3.5.5.10}$$

3.5.6. Современная ценность вечной ренты с непрерывным начислением процентов

Рассмотрим задачу об определении современной ценности вечной ренты с непрерывным начислением процентов по ставке δ. Для вывода формулы для расчета, вышеуказанной задачи возьмем известную формулу:

$$P=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим

$$P_{\infty}=\frac{R}{i} \tag{3.5.6.1}$$

Рассмотрим вопрос определения современной ценности вечной ренты в случае, когда мы рассматриваем p-срочную ренту с начислением процентов в конце года по ставке сложных процентов, равной i. С этой целью возьмем известную нам формулу:

$$P=\frac{R}{p}\cdot\frac{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}{(1+i)^{p}-1}$$

и переходя к пределу при $n\to+\infty$, имеем:

$$P_{\infty} = \frac{R}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right]} \qquad (3.5.6.2)$$

Но $p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right] = \frac{i}{K_{pji}}$

Поэтому: $$P_{\infty} = R \cdot \frac{K_{pji}}{i} \qquad (3.5.6.3)$$

Для определения вечной ренты с периодом больше года и начислением процентов в конце каждого года по ставке сложных процентов, равной i, возьмем формулу

$$P = R_r \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^r - 1}$$

и переходя к пределу при $n \to \infty$ имеем:

$$P_{\infty} = \frac{R_r}{(1+r)^r - 1}\lim_{n\to\infty}\left[1-(1+i)^{-n}\right] = \frac{R_r}{(1+i)^r - 1}$$

Известно, что $$(1+i)^r - 1 = i \cdot S_{r,i} \qquad (3.5.6.4)$$

то получим второй вариант вычисления P_{∞}

$$P_{\infty} = \frac{R_r}{i \times S_{r,i}} \qquad (3.5.6.5)$$

Если годовая рента с начислением процентов m раз в год осуществляется по ставке j_m сложных процентов, то для определения современной ценности вечной ренты, возьмем известную нам формулу

$$P = R \cdot \frac{1-(1+\frac{j_m}{m})^{-nm}}{(1+\frac{j_m}{m})^m - 1}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, из последней формулы, получим

$$P_\infty = \frac{R}{(1+\frac{j_m}{m})^m - 1} \tag{3.5.6.6}$$

Но $(1+\frac{j_m}{m})^m - 1 = \frac{j_m}{m} \times S_{m;\frac{j_m}{m}}$ поэтому, второй вариант формулы имеет вид:

$$P_\infty = \frac{R}{\frac{j_m}{m} \cdot S_{m;\frac{j_m}{m}}} \tag{3.5.6.7}$$

Рассмотрим p-срочную ренту с начислением процентов m раз в год по ставке j_m. В этом случае современная ценность вечной ренты определяется переходя к пределу к обеим частям известной нам формулы:

$$P = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+\frac{j_m}{m})^{-nm}}{(1+\frac{j_m}{m})^{\frac{m}{p}} - 1}$$

Т.е. $$P_\infty = \frac{R}{p} \cdot \frac{1}{(1+\frac{j_m}{m})^{\frac{m}{p}} - 1} \cdot \lim_{n\to\infty}\left[1-(1+\frac{j_m}{m})^{-nm}\right] = \frac{R}{p \cdot \left[(1+\frac{j_m}{m})^{\frac{m}{p}} - 1\right]} \tag{3.5.6.8}$$

Но в предыдущих параграфах, нам известно, что

$$(1+\frac{j_m}{m})^{\frac{m}{p}} - 1 = \frac{j_m}{m} \cdot S_{\frac{m}{p};\frac{j_m}{m}}$$

Поэтому получаем второй вариант формулы расчета современной ценности вышеуказанной ренты.

$$P_\infty = \frac{R}{p \cdot \frac{j_m}{m} \cdot S_{\frac{m}{p};\frac{j_m}{m}}} \tag{3.5.6.9}$$

В частности в случае, если $m=p$, то имеет место равенство:

$$S_{1,\frac{j_m}{m}} = 1$$

Тогда формула (3.5.6.9) принимает вид:

$$P_\infty = \frac{R}{m \cdot \frac{j_m}{m}} = \frac{R}{j_m} \qquad (3.5.6.10)$$

Для определения современной ценности вечной ренты с периодом больше года с начислением процентов m раз в год по ставке j_m, возьмем известные нами формулы:

$$P = R_r \cdot \frac{1-(1+\frac{j_m}{m})^{-nm}}{(1+\frac{j_m}{m})^{mr}-1}$$

Переходя к обеим частями этого равенство пределу при $n \to \infty$, имеем:

$$P_\infty = R_r \cdot \frac{1}{(1+\frac{j_m}{m})^{mr}} \lim_{n\to\infty}\left[1-(1+\frac{j_m}{m})^{-nm}\right] = \frac{R_r}{(1+\frac{j_m}{m})^{mr}-1} \qquad (3.5.6.11)$$

Согласно следующего равенства:

$$(1+\frac{j_m}{m})^{mr} - 1 = \frac{j_m}{m} \cdot S_{n;\frac{j_m}{m}}$$

Формулу (3.5.5.11) представим в виде:

$$P_\infty = \frac{R_r}{\frac{j_m}{m} \cdot S_{mr;\frac{j_m}{m}}} \qquad (3.5.6.12)$$

Современная ценность годовой ренты определяется формулой:

$$P = R \cdot \frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta}-1}$$

Если к обеим частям этой формулы перейти к пределу при $n \to \infty$ то имеем

$$P_\infty = \lim_{n \to \infty} p = \frac{R}{e^\delta - 1} \qquad (3.5.5.13)$$

Это и есть современная ценность годовой ренты с непрерывным начислением процентов по ставке δ. Аналогичным образом определяются формулы p-срочной ренты с непрерывным начислением процентов по ставке δ:

$$P_\infty = \frac{R}{p(e^{\frac{\delta}{p}} - 1)} \qquad (3.5.5.14)$$

и вечная рента с периодом больше года с непрерывным начислением процентов по ставке δ:

$$P_\infty = \frac{R_r}{e^{\delta r} - 1} \qquad (3.5.5.15)$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1: Предприятие для подготовки и переподготовки специалистов создает специальный фонд для выплаты этим кадрам денежных средств на учебу в сумме 450000 сом ежегодно. Какую сумму должно положить предприятие в банк, чтобы обеспечить получение необходимых денег неограниченно долго, если:

а) банк выплачивает 10% годовых (сложных)

б) банк выплачивает проценты по ставке $j_4 = 10\%$

в) банк выплачивает непрерывные проценты с силой роста $\delta = 10\%$

Определить:

1. Современную ценность вечной ренты с начислением в конце года.
2. Современную ценность вечной ренты с начислением процентов m раз в год по ставке $j_4 = 10\%$
3. Последовательность полученных сумм вечной ренты с непрерывным начислением процентов по годовой ставке $\delta = 10\%$

Решение:

а) С помощью формулы $P_\infty = \frac{R}{i}$, определим современную ценность вечной ренты с начислением в конце года:

где $R=45000,\ i=0.1$

$$P_\infty = \frac{R}{i} = \frac{450000}{0,1} = 4500000 \text{ сом}$$

б) С помощью формулы $P_\infty = \frac{R}{\frac{J_m}{m} \cdot S_{m; \frac{J_m}{m}}}$ определим современную ценность вечной годовой ренты с начислением процентов m раз в год по ставке $j_2 = 10\%$

где m=4, $j_m = 10\%,\ \frac{J_m}{m} = \frac{10\%}{4} = 2,5\%$

тогда $P_\infty = \frac{450000}{0,025 \cdot S_{4;2,5\%}}$

Вычислим $S_{4;2,5\%}$:

$$S_{4;2,5\%} = \frac{(1+0,025)^4 - 1}{0,025} = \frac{(1,025)^4 - 1}{0,025} = \frac{0,1038128}{0,025} = 4,152512$$

Таким образом, имеем:

$$P_\infty = \frac{450000}{0,025 \cdot 4,152512} = \frac{450000}{0,1038128} = 4334725,5 \text{ сом}$$

в) Последовательно получаемые суммы образуют вечную ренту с непрерывным начислением процентов по годовой ставке δ, определим применяя формулу:

$$P_\infty = \frac{R}{e^\delta - 1}$$

где R=45000, $\delta = 10\%$

$$P_{\infty} = \frac{450000}{e^{0,1} - 1}$$

Для вычисления $e^{0,1}$ воспользуемся формулой $e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + 0(x^4)$

$$e^{0,1} = 1 + 0,1 + \frac{0,01}{2} + \frac{0,001}{6} = 1,1 + 0,005 + 0,0001667 = 1,051667$$

Тогда $P_{\infty} = \frac{450000}{0,051667} = 8709621,2$ сом

Пример 2: Решить предыдущий пример, если предприятие желает снимать равные суммы ежемесячно (при том же годовом доходе).

Решение:

а) Последовательность получаемых сумм образуют p-срочную вечную ренту с выплатой процентов в конце года. Для определения её возьмем формулу:

$$P_{\infty} = R \cdot \frac{K_{p,i}}{i}$$

где $K_{p,i} = \frac{i}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right]}$ по условию примера $p=12$, $i=10\%$

По таблице 4 для определения коэффициента $K_{p,i}$ находим $K_{10,10\%} = 1,04324587$

Тогда $P_{\infty} = R \cdot \frac{K_{p,i}}{i} = 450000 \cdot \frac{1,04324587}{0,1} = 450000 \cdot 10,4324587 = 4694606,1$ *сом*

б) С применением формулы $P_{\infty} = \frac{R}{\frac{j_m}{m} \cdot S_{m/\frac{j_m}{m}}}$ определим последовательность снимаемых сумм образующих p-срочную вечную ренту с выплатой процентов 4 раза в год.

где $m=4$, $p=10$ $j_m = 10\% = 0,1$, $j_m/m = 0,1/4 = 0,025 = 2,5\%$

$$P_{\infty} = \frac{450000}{10 \cdot 0{,}025 \cdot S_{0,4;2,5\%}}$$

Вычислим $S_{0,4;2,5\%} = \frac{(1+0{,}025)^{0,4}-1}{0{,}025} = \frac{(1{,}025)^{0,4}-1}{0{,}025} = \frac{0{,}010125}{0{,}025} = 0{,}405$

Тогда $P_{\infty} = \frac{450000}{0{,}25 \cdot 0{,}405} = \frac{450000}{0{,}10125} = 4444444{,}4$

в) Рассмотрим p-срочной вечной ренты с выплатой непрерывных процентов с целью подсчета современной ценность вечной ренты воспользуется формулой:

$$P_{\infty} = \frac{R}{p(e^{\frac{\delta}{p}} - 1)}$$

Применяем эту формулу при $p=12$, $\delta = 10\% = 0{,}1$

Тогда $P_{\infty} = \frac{450000}{12 \cdot \left(e^{\frac{0,1}{12}} - 1\right)} = \frac{37500}{e^{0,0083} - 1}$

но $e^{0,0083} \approx 1 + 0{,}0083 + 0{,}0003444 = 1{,}0086444$

тогда $P_{\infty} = \frac{450000}{0{,}0086444} = 52056822$ сом

Пример 3: Предприятие планирует организовать фонд для выплаты стипендий направленным на подготовку и переподготовку специалистов в сумме 450000 сом ежегодно. При условии, что предприятие желает снимать каждые 2 года сумму в 900000 сом. Какую сумму должно положить предприятия в банк, чтобы обеспечить получение необходимых денег неограниченно долго, если:

а) банк выплачивает 10% годовых (сложных),

б) банк выплачивает проценты по ставке $j_4 = 10\%$

в) банк выплачивает непрерывные проценты с силой роста $\delta = 10\%$

Решение:

Согласно условию примера во всех случаях последовательность снимаемых со счета сумм является вечной рентой с периодом больше года.

а) С целью определения современной ценности вечной ренты с периодом больше года и начислением процентов в конце каждого года. Возьмем формулу и осуществляем вычисление при $R_r = 450000$, r=2, i=10%.

$$P_\infty = \frac{R_r}{i \cdot S_{r,i}} = \frac{R_r}{i(1+i)^r - 1} = \frac{450000}{(1+0,1)^2 - 1} = \frac{450000}{(1,1)^2 - 1} = \frac{450000}{0,21} = 2142857,1 \text{ сом}$$

б) Современная ценность вечной ренты с периодом больше года с начислением процентов m раз в год по ставке j_m определяется по формуле:

$$P_\infty = \frac{R}{\frac{j_m}{m} \times S_{m,\frac{j_m}{m}}}$$

) Результат P_∞ вычислим при $r=2$, $R_r = 900000$, m=4, j/m=10%/4=2,5% =0,025

$$P_\infty = \frac{900000}{0,025 \cdot S_{8,2.5\%}} = \frac{900000}{(1+0,025)^8 - 1} = \frac{900000}{(1,025)^8 - 1} = \frac{900000}{0,15969} \approx 5635919,5$$

в) Последовательность снимаемых сумм является p-срочной вечной рентой с выплатой непрерывных процентов. С целью решения этого вопроса воспользуемся формулой $P_\infty = \frac{R}{p \cdot (e^{\frac{\delta}{p}} - 1)}$ при p=12, $\delta = 10\%$, R=900000

Тогда
$$P_\infty = \frac{900000}{12 \cdot \left(e^{\frac{0.10}{12}} - 1\right)} = \frac{900000}{12(e^{0,0083} - 1)} \quad (3.5.6.16)$$

Вычислим $e^{0,0083}$, для этого воспользуемся формулой:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + 0(x^4)$$

Тогда $e^{0,0083} \approx 1 + 0,0083 + 0.000034445 + 0,0000002 = 1,008334635$

Подставив это значение $e^{0,0083} \approx 1,008335$ в формулу (3.5.6.16) получим:

$$P_\infty == \frac{900000}{12(1,008335 - 1)} = \frac{900000}{0,10002} \approx 8998200,34$$

3.6. Погашение долгосрочной задолженности несколькими платежами

Рассмотрим случай, когда задолженность погашается несколькими платежами, которые делаются через равные промежутки времени. Такие методы погашения задолженности применяются в потребительском кредите и во внешне торговых расчетах.

Сформулируем следующую задачу:

Предприятие взяло ссуду, в размере D и обязалось вернуть долг, сделав n равные срочных выплат через равные промежутки времени. Требуется определить величину срочной уплаты Y при условии, что на долг начисляются сложные проценты по ставке q за каждые промежутки времени. Последовательность срочной уплаты ренты является финансовой рентой, имеющей n членов, современная ценность которой равна D. Как нам известно, современная ценность ренты, состоящей из n периодических платежей, равных D каждый, на которые начисляются сложные проценты по ставке q за каждый период определяется формулой:

$$D = Y \cdot a_{n,q}$$

Отсюда
$$Y = \frac{D}{a_{n,q}} \qquad (3.6.1)$$

где
$$a_{n,q} = \frac{1-(1+q)^{-n}}{q} \qquad (3.6.2)$$

Сумма выплачиваемых в t-ом периоде процентов равна $D_t \cdot q$, здесь D_t-остаток долга на начало t-го периода и $D_1 = D$. Сумма погашения долга на начало t-ом периоде равна величине:

$$Y_t = Y - D_t \cdot q$$

Остаток долга на начало t-го периода вычисляется по формуле:

$$D_t = D_{t-1} - Y_{t-1}$$

где $t=2,3\ldots, n$.

Пример1: Господин Ахмедов купил в кредит автомобиль, который стоит 120000 сом. Он обязался погасить равными срочными уплатами в течение 5 лет, делая в конце каждого года. Найти величину срочной уплаты и составить план погашения долга, если долг магазин начисляет $q=10\%$ годовых.

Решение:

По условию задачи $n=5$, $D_1 = D = 120000$, $q=0,1$ для определения величины срочной уплаты воспользуемся формулой:

$$Y = \frac{D}{a_{5.10\%}} = \frac{120000}{a_{5.10\%}} \qquad (3.6.3)$$

Определим $a_{5.10\%}$:

$$a_{5.10\%} = \frac{1-(1+0,1)^{-5}}{0,1} = \frac{(1,1)^5 - 1}{0,1\cdot(1,1)^5} = \frac{0,61051}{0,1\cdot 1,61051} = \frac{0,61051}{0,161051} = 3,7907867 \approx 3,79079$$

Тогда величина срочной уплаты будет равной:

$$Y = \frac{120000}{3,79079} = 31655,67 \text{ сом}$$

Составим план погашения долга:

Номер года t	Остаток долга на начало t-го года $D_t = D_{t-1} - d_{t-1}$	Срочная уплата Y	Сумма выплаченных в t-ом году процентов $D_t \times 0.1$	Сумма погашения долга в t-ом году $d_t = Y - D_t \times 0.1$
1	120000	31656	12000	19656
2	100344	31656	10034,4	21621,6
3	78722.4	31656	7872,24	23783,76
4	54938,64	31656	5493,864	26162,136
5	28776,504	31656	2877,6504	28778,35

Итого: 120001,84 ≈ 120000

3.7. Определение срока погашения долгосрочной задолженности

Для определения срока погашения долгосрочной задолженности, возьмем известную нам формулу:

$$D = Y : \frac{q}{1-(1+q)^{-n}} \tag{3.7.1}$$

Преобразуя эту формулу получим:

$$(1+q)^{-n} = 1 - \frac{D \cdot q}{Y}$$

Обе части прологарифмируем по основанию e, тогда:

$$-n \cdot \ln(1+q) = \ln(1 - \frac{D \cdot q}{Y})$$

Отсюда:

$$n = -\frac{\ln(1 - \frac{D \cdot q}{Y})}{\ln(1+q)} \tag{3.7.2}$$

Вычислим значение осуществленное по формуле (3.7.2), что дает нам ее нецелое значение.

Пример1: Господин Ахмедов купил в кредит автомобиль, который стоит 120000 сом. Он и кредитор договорились о том что, что срочная уплата будет равной 27600 сом. За долг выплачиваются проценты по годовой ставке $q=10\%$. Определим срок погашения долга и составим план погашения долга.

Решение:

По условию задачи $D=120000$, $q=0.1$, $Y=27600$. Тогда согласно формуле (3.7.2) получим:

$$n=-\frac{\ln(1-\dfrac{120000\cdot 0{,}1}{27600})}{\ln(1+0{,}1)}=-\frac{\ln(1-0{,}4347825)}{\ln(1{,}1)}=-\frac{\ln(0{,}5652175)}{\ln(1{,}1)}$$

Для вычисления натуральных логарифмов используем формулу:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+0(x^4)$$

где $|x|<1$

$$\ln(1{,}1)=\ln(1+0{,}1)\approx 0{,}1-\frac{(0{,}1)^2}{2}+\frac{(0{,}1)^3}{3}=0{,}1-0{,}005+0{,}0003333=0{,}095333$$

$$\ln(0{,}5652)=\ln(1-0{,}4348)\approx -0{,}4348-\frac{(0{,}4348)^2}{2}-\frac{(0{,}4348)^3}{3}=-0{,}4348-0{,}094255-$$
$$-0{,}02740=-0{,}5567255\approx -0.55673$$

Тогда $n=+\dfrac{0{,}55673}{0{,}095333}\approx 5.84$

Полученный результат означает, что долг будет возвращаться 5,84 года. На практике это означает, что первые 5 лет срочная уплата равна 27600 сом, а в последнем году срочная уплата меньше, так как год неполный.

Составим план погашения долга:

Номер года t	Остаток долга на начало t-го года $D_t = D_{t-1} - d_{t-1}$	Срочная уплата Y	Сумма выплаченных в t-ом году процентов $D_t \times 0.1$	Сумма погашения долга в t-ом году $d_t = Y - D_t \times 0.1$
1	120000	27600	12000	15600
2	104400	27600	10440	17160
3	87240	27600	8724	18876
4	68364	27600	6836,4	20763,6
5	47600,4	27600	4760	22840
6	24760,4	27236	2476	24760

Из этой таблицы видно, что на шестом году срочная уплата меньше на 364 сома.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какую сумму надо положить в банк, выплачивающий 12% годовых, чтобы иметь возможность снимать в конце каждого года 1000 сом, исчерпав весь вклад к концу десятого года?
2. Какую сумму надо вложить в банк, если банк выплачивает непрерывные проценты по ставке $\delta = 5\%$, чтобы иметь возможность снимать в конце каждого года 2500 сом, исчерпав весь вклад к концу десятого года?
3. Какую сумму надо вложить в банк, если банк выплачивает проценты по ставке $i_{12} = 5\%$, чтобы иметь возможность снимать в конце каждого года 1500 сом, исчерпав весь вклад к концу 5-го года.
4. Какую сумму следует положить в банк, чтобы в течение следующих 10 лет получать ежегодно по 12000 сом, снимая эту сумму равными частями каждые 6 месяцев, если банк начисляет на вложенные в него деньги 8% годовых?
5. Какую сумму следует положить в банк, чтобы в течение следующих 6 лет получать ежегодно по 15000 сом снимая эту сумму равными частями ежеквартально, если банк начисляет проценты по ставке $j_3 = 5\%$

6. Какую сумму должен положить в банк господин Иванов, чтобы в течение следующих 10 лет получать ежегодно по 10 000 сом, снимая эту сумму равными частями каждые 6 месяцев, если банк начисляет непрерывно проценты с силой роста $\delta = 8\%$.
7. Какую сумму должен положить в банк господин Петров, чтобы в течение следующих 12 лет имел возможность снимать со счета каждые два года по 12000 сом, исчерпав весь вклад к концу этого срока, если банк начисляет на деньги, находящиеся на счете 12% годовых?
8. Какую сумму должен положить в банк господин Петров, чтобы в течение следующих 12 лет, имел возможность снимать со счета каждые два года по 12000 сом исчерпав весь вклад к концу этого срока, если банк начисляет:
   а) непрерывные проценты с силой роста $\delta = 10\%$
   б) непрерывные проценты по ставке $j_2 = 10\%$
9. Перед выходом на пенсию господин Акматов планирует обеспечить себе неограниченно долго ежегодный доход 24000 сом. Какую сумму он должен положить для этого в банк, выплачивающий 10% годовых?
10. Перед выходом на пенсию господин Акматов планирует обеспечить себе неограниченно долго ежегодный доход 24000 сом, если Акматов желает снимать ежекваратально четверть годового дохода (по 6000 сом)
11. Решить задачу 9, если господин Акматов желает снимать деньги раз в 3 года (по 72000 сом)
12. Решить задачу 9, если банк выплачивает проценты по ставке $j_6 = 5\%$
13. Решить задачу 9, если господин Акматов желает снимать деньги раз в 3 года (по 72 000 сом), и банк выплачивает проценты по ставке $j_6 = 5\%$
14. Решить задачу 9, если господин Акматов желает снимать деньги раз в 3 года (по 72 000 сом), и банк начисляет на деньги непрерывные проценты с силой роста $\delta = 5\%$
15. Какую сумму необходимо поместить в банк, чтобы иметь возможность в течение 6 лет ежегодно снимать со счета 3500 сом, исчерпав счет полностью к концу срока? Решить задачу для следующих вариантов начисления процентов:
   а) в конце года по ставке $i=5\%$;

б) в конце квартала при той же годовой ставке;

в) непрерывно с силой роста $\delta = 10\%$ (современная ценность ренты).

16. (Задача на отыскивание размера платежа) Определить размер равных взносов в конце года для следующих двух ситуаций, в каждом из которых предусматривается начисление на взносы годовых процентов по ставке 8%.
    1. Создать к концу 5 года фонд равный 500000 сом.
    2. Погасить к концу 5 года текущую задолженность равной 500000 сом.
17. (Задача на отыскание срока ренты) Акматов должен выплатить Ташматову 56000 сом. Он предлагает заменить эту разовую выплату ежегодными платежами в начале каждого года по 14000 сом каждый. Сколько лет должен будет ждать Ташматов полного погашении долга со стороны Акматова, если начисляется проценты по ставке 10% годовых?
18. (Задача на отыскание ставки процентов) Банк предлагает клиенту выплату ренты на следующих условиях: клиент вносит 14000 сом, а банк в течение 5 лет выплачивает ему в конце каждого года по 4200 сом. Определить доходность подобной операции.
19. (Задача ренты разовым платежом) Два платежа $S=140000$ сом, и *60000* сом со сроками 150 и 180 дней, отсчитываемыми от одной базы, заменяются одним сроком 200 дней. Сторона согласилаеь на замену при использовании простой ставки, равной 6% годовых. Найти величину консолидированного платежа S_{Σ}.
20. (Задача на отыскание срока платежа, заменяющего ренту) Рассматриваются 2 варианта перечисления суммы 150000 сом платежами в конце года с приростом в 3500 сом на протяжении 10 лет или разово. Найти срок I однократного платежа при условии, что ставка сложного процента равна 8%.
21. Страховая компания принимает по полугодиям по 350000 сом в течении 3 лет. Чему равна сумма, полученная страховой компании по истечении срока договора, если обслуживающий компанию банк начисляет проценты из расчета 15% годовых: а) по полугодиям б) ежеквартально?

22. Владелец малого предприятия предусматривает создание в течение 3 лет фонда развития в размере 210000 сом. Он рассматривает две возможности создания этого фонда с помощью банковского депозита с начислением по сложной ставке 20% годовых:

а) ежегодными, равными платежами

б) разовым вложением на 3 года.

23. Для обеспечения себя дополнительного пенсионного дохода, 60-летний Рахманалиев хочет воспользоваться услугами накопительной пенсионной системы. Какую сумму денег он должен внести на индивидуальный лицевой счет пенсионного фонда, чтобы после выхода на пенсию иметь в течении всей оставшейся жизни прибавку за счет накопительной части пенсии сумму 24000 сом ежегодно. Ставка начисления 12% годовых.

Глава IV. Кредитные расчеты
4.1. Планирование погашения долга
4.1.1. Погашение долга одновременным платежом

Существуют различные способы погашения задолженности. Возможны два варианта:

1. Погашение единовременным платежом, т.е. возврат всей суммы в оговоренный срок;
2. Погашение долга в рассрочку, т.е. частями.

Рассмотрим задачи о погашении суммы долга единовременным платежом в конце срока с постоянной выплатой процентов.

В простейшем случае кредит погашается единым платежом в конце срока, он определяется формулой:

$$Y = D \cdot (1+i)^n \qquad (4.1.1.1)$$

где Y - срочная уплата, D - сумма долга.

Этот платеж, как наращенная сумма долга, состоит из двух частей:

- Возврат основной суммы долга (D);
- Выплата процентов по долгу (I), где I определяется формулой:

$$I = D(1+i)^n - D \qquad (4.1.1.2.)$$

т.е. из наращенной суммы Y вычитается долг D.

Если проценты выплачиваются ежегодно, то величина срочной уплаты

определяется формулой:

$$Y = I + R = D \cdot q + D : S_{n,i} \qquad (4.1.1.3.)$$

где $$S_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}; \qquad R = D : S_{n,i} \qquad (4.1.1.4.)$$

где D - первоначальная сумма долга;

q - ставка процентов по условиям займа;

$S_{n,i}$ - коэффициент наращенной финансовой ренты;

n - срок долга в годах;

i - ставка процентов при создании фонда погашения.

Наращенная сумма на момент K, потоком произведенным в счет погашения долгосрочных уплат Y_1, Y_2,..., Y_k определяется формулой

$$S_k = \sum_{t=1}^{k} Y_t (1+i)^{k-t} \qquad (4.1.1.5)$$

Тогда остаток долга L_k на конец любого года K будет равным

$$L_k = D(1+i)^k - \sum_{t=1}^{k} Y_t (1+i)^{k-t} \qquad (4.1.1.6)$$

Пример 1: Кредит в размере 450000 сом выдан под 8 %годовых сроком на 4 года, с ежегодной выплатой процентов по долгу. Для погашения суммы долга одновременным платежом создается фонд, куда ежегодно вносятся равные суммы на которые начисляются проценты по ставке 10%. Найти ежегодные расходы должника.

Решение:

Определим сначала I и R:

$$I = D \cdot q = \ 450000 \cdot 0{,}08 = 36000 \text{ сом.}$$

$$R = D \div \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 450000 \div \frac{(1+0{,}1)^4 - 1}{0{,}1} = 450000 \div \frac{(1{,}1)^4 - 1}{0{,}1} =$$

$$= 450000 \cdot \frac{0{,}1}{0{,}4641} = \frac{450000}{0{,}4641} = 96961{,}86$$

Отсюда ежегодные расходы должника составляют величину срочной уплаты. Она будет равна:

$$Y = I + R = 36000 + 96961{,}86 = 132961{,}86$$

Таким образом, ежегодные расходы должника по обслуживанию долга составляют 132961,86 сомов.

Взносы погасительного фонда равны: 96961,86 сом

Но более наглядным и эффективным способом планирования долга является составление плана погашения долга одновременным платежом, с ежегодной выплатой процентов и созданием погасительного фонда.

Год	Долг (Д)	Выплата процентов ($I = D \cdot q$)	Взносы в погасительный фонд $\left[R = D \div \frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$	Величина срочной уплаты ($Y = I + R$)	Накопленная сумма долга $[FV_{t+1} = FV_t \cdot (1+i) + R]$
1	450000	36000	96961,86	132961,86	96961,86
2	450000	36000	96961,86	132961,86	203619,91
3	450000	36000	96961,86	132961,86	320943,76
4	450000	36000	96961,86	132961,86	449999,99≈450000
Итого	х	144000	387847,44	531847,44	х

Из этой таблицы видно, что ежегодные расходы по обслуживанию долга составляют 132961,86 сомов, что в целом за 4 года составляют сумму 531847,44 сомов, причем выплата процентов за 4 года 144000 сомов, а на погашение основного долга в размере 450000 сомов приходится всего лишь 387847,44 сомов, т.е. 62152,56 сомов является набежавшими процентами на размещенные средства, в фонде погашения.

Таким образом, создание фонда погашения является необходимым элементом составления плана погашения долга.

Теперь рассмотрим второй вариант погашения долга единовременным платежом. Он состоит в выплате процентов одновременно с погашением долга. В этом случае фонд погашения будет равен величине срочной уплаты, т.е. $R_t = Y_t$.

Величина срочной уплаты определяется формулой:

$$Y = \left[D \cdot (1+q)^n\right] \div S_{n,i} = \left[D(1+i)^n\right] \div \frac{\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \qquad (4.1.1.7)$$

где D - первоначальная сумма долга;

q - Ставка процентов по условиям займа;

$S_{n,i}$ - Коэффициент наращения финансовой ренты;

n - Срок долга в годах;

i - Ставка процентов при создании погасительного фонда.

Пример 2: Кредит в размере 450000 сом выдан под 8% годовых, сроком на 4 года, с ежегодной выплатой процентов по долгу. Погашение единовременным платежом, как суммы основного долга, так и выплаты процентов создается фонд, куда ежегодно вносятся равные суммы на которые начисляются проценты по ставке 10%.Определить величины срочной уплаты и составить план погашения долга единовременным платежом.

Решение:

Воспользуюсь формулой:

$$Y=\left[D\cdot(1+q)^{n}\right]\div S_{n;i}=D\cdot(1+q)^{n}\div\frac{(1+i)^{n}-1}{i}=D\cdot(1+q)^{n}\cdot\frac{i}{(1+i)^{n}-1};$$

По условию задачи $i=0,1;\ q=0,08;\ n=4;\ D=450000.$

Тогда $Y=450000\cdot(1+0,08)^{4}\cdot\frac{0,1}{(1,1)^{4}-1}=450000\cdot1,3605\cdot\frac{0,1}{0,4641}=131916,61$ сом.

Таким образом, величина ежегодных расходов по обслуживанию долга составит 131916,61 сомов, а общая сумма расходов по обслуживанию долга составляет величину 527666,44 сомов. Это не много больше, чем в предыдущем примере.

План погашения долга единовременным платежом представим в следующей таблице:

Год	Долг (D_t)	Взносы в погасительный фонд $(R_t=Y_t)$	Накопленная величина в погасительном фонде (S_t)	Процент по долгу (I_t)	Величина погашения текущего долга (S_t-I_t)
1	450000	131916,61	131916,61	45000	86916,61
2	495000	131916,61	277024,88	49500	227524,88
3	544500	131916,61	436643,98	54450	382193,98
4	598951	131916,61	612224,98	59895,1	552329,88
Итого		527666,44	Х.	654345,1	Х.

$S_1=131916,61$

Определим: $S_2=131916,61\cdot(1+0,1)+131916,61=277024.88$

$S_3=131916,61\cdot(1+0,1)^2+131916.61\cdot(1+0,1)+131916.61=131916.61(1.21+1,1+1)=$

$=131916,61\cdot3,31=436643.98$

$$S_4 = 131916{,}61(1+0{,}1)^3 + 131916{,}61\cdot(1+0{,}1)^2 + 131916{,}61\cdot(1+0{,}1) + 131916{,}61 = 131919{,}61$$
$$[1{,}331 + 1{,}21 + 1{,}1 + 1] = 131916{,}61\cdot 4{,}641 = 612224{,}98$$

4.1.2.Погашение долга в рассрочку

Одним из вариантов погашения долга в рассрочку является погашение основной суммы долга равными частями.

В этом случае погашение долга определяется в виде:

$$d_t = D \div n = const \qquad (4.1.2.1.)$$

где: d_t - величина погашения основной суммы долга;

D - первоначальная сумма долга;

n - срок долга в годах;

t – номер года; $t=1, 2, 3, \dots, n$

Проценты начисляются на уменьшаемую сумму основного долга:

$$I_t = D_t \cdot q \qquad (4.1.2.2.)$$

где D_t - остаток долга на начало очередного года;

q- ставка процентов, начисляемых на сумму долга, на сумму долга.

Размер срочной уплаты Y_t определяется в виде суммы процентов и сумму погашения долга:

$$Y_t = I_t + d_t \qquad (4.1.2.3)$$

Пример 1. Сумма 250 000 сомов выдана в кредит под 12% на 5 лет. Определить величины срочной уплаты при погашении основной суммы долга равными ежегодными частями. Составить план погашения основной суммы долга равными частями?

Решение:

Определим величину суммы погашения долга.

$d_t = D : n = 250000 : 5 = 50000$ сом

$I_t = D_t \cdot q = 250000 \cdot 0.12 = 30000$

Тогда срочная уплата определяется следующим образом:

$$Y_t = I_t + d_t = 30000 + 50000 = 80000 \text{ сом}$$

Величина срочной уплаты меняется из года в год. Дальнейшие вычисления без построения плана погашения долга в виде таблицы нельзя обойтись:

План погашения основной суммы долга равными частями отражено в следующей таблице:

Год (t)	**Долг(D)**	**Сумма погашения долга** (d_t)	**Выплата процентов** (I_t)	**Величина срочной уплаты** (Y_t)
1	250000	50000	30000	130000
2	20000	50000	24000	74000
3	15000	50000	18000	68000
4	100000	50000	12000	62000
5	50000	50000	6000	56000
итого	х	250000	90000	390000

Из таблицы видно, что общие расходы по обслуживанию долга составили 390 000 сомов из которых 140 000 сомов составляют проценты, а 250 000 сомов – погашения основной части суммы долга.

4.1.3. Погашение долга и процентов по нему равными суммами в течение срока ссуды

Долг можно погасить в рассрочку равными уплатами и она состоит из суммы долга и величины процентов:

$$Y_t = I_t + d_t = const$$

Размер срочной уплаты определяется формулой

$$Y_t = D : \frac{1-(1+q)^{-n}}{q} = \frac{Dq}{1-(1+q)^{-n}}$$

где Y_t - величина срочной уплаты;

D - первоначальная сумма долга;

q - процентная ставка на сумму долга;

n - срок долга в годах;

t - номер года, $t=1,2,3...n$.

Пример 1: Долг в сумме 250 000 сом, требуется погасить за 5 лет равными суммами выплачиваемыми в конце года. За заем начисляется проценты по годовой ставке 5%. Погашение долга предусматривает уплату равными срочными выплатами. Определить общие расходы по погашению долга и составить план погашения долга равными срочными уплатами.

Решение:

Срочная уплата, включающая в себя погашение основной суммы долга и выплату процентов по долгу, равна:

$$Y_t = \frac{250000 \cdot 0{,}05}{1-(1+0{,}05)^{-5}} = \frac{12500 \cdot (1{,}05)^5}{(1{,}05)^5 - 1} = \frac{12500 \cdot 1{,}276282}{0{,}276282} = \frac{15953{,}51953}{0{,}276282} = 57743{,}623$$

Тогда общие расходы по погашению долга будет равным

$$\sum_{t=1}^{5} Y_t = 57743{,}623 \cdot 5 = 288718{,}115 \text{ сом}$$

Таким образом, ежегодные расходы по погашению долга будут составлять 57743,623 сомов, а за весь срок финансовой операции – 288718,115 сом.

План погашения долга равными срочными уплатами представлен в виде таблицы:

Год (t)	Долг (D_t)	Срочная уплата (Y_t)	Проценты (Y_t)	Сумма погашения основного долга $d_t = Y_t - I_t$
1	250000	57743,623	12500	45243,623
2	204756,377	57743,623	10237,82	47505,803
3	157250,574	57743,623	7862,529	49881,094

4	107369,48	57743,623	5368,474	52375,149
5	54994,331	57743,623	2749,717	54993,906
итого	х	288718,115	38718,54	250000

Таким образом, общие расходы по обслуживанию долга составляют 288718,115 сомов, из которых 250 000 сомов идут на погашение долга, а 38718,54 сомов – проценты. В таблице указаны распределение суммы срочной уплаты на выплату процентов и непосредственное погашение долга.

4.1.4. Погашение основной суммы долга равными частями

Одним из вариантов погашения долга в рассрочку является погашение основной части суммы долга равными частями. Здесь величина погашения долга определяется следующим образом:

$$d_t = D : n = const \qquad (4.1.4.1)$$

где d_t - величина погашения основной суммы долга;

D – первоначальная сумма долга;

n - срок долга в годах;

t - номер года, $t=1,2,3...,n$

Проценты начисляются на уменьшаемую сумму основного долга:

$$I_t = D_t \cdot q \qquad (4.1.4.2)$$

где D_t- остаток долга на начало очередного года

q- ставка процентов, начисляется на сумму долга.

Срочная уплата на конец текущего года определяется формулой:

$$Y_t = I_t + d_t = D_t \cdot q + D : n \qquad (4.1.4.3)$$

<u>Пример 1:</u> Долг в сумме 250 000 сом, требуется погасить за 5 лет равными суммами, выплачиваемыми в конце года. За заем начисляется проценты по годовой ставке 5%. Определить величину

срочной уплаты при погашении основной суммы долга равными ежегодными частями и составим план погашения кредита

Решение:

Определим выплаты по долгу $d_t = \frac{D}{n} = \frac{250000}{5} = 50000$

выплата процентов $I_t = 0.05 \cdot D_t = 0.05 \cdot 250000 = 12500$.

Тогда срочная уплата при $t=1$ будет равной $I_t = D_1 \cdot q = 250000 \cdot 0.05 = 12500$

$$Y_t = d_1 + I_1 = 50000 + 12500 = 62500$$

$$D_2 = 250000 - 50000 = 200000.$$

План погашения основной суммы долга равными частями отобразим в следующей таблице:

Год (t)	**Долг** (D_t)	**Сумма погашения долга** (d_t)	**Выплата процентов** (I_t)	**Величина срочной уплаты** Y_t
1	250000	50000	12500	62500
2	200000	50000	10000	60000
3	150000	50000	7500	57500
4	100000	50000	5000	55000
5	50000	50000	2500	52500
итого	х	250000	37500	287500

4.1.5. Погашение кредита потоком платежей

Пусть Y_t - величина погашающего платежа в конце года t, $t = \overline{1,n}$. Срочные уплаты $\{Y_t\}$ должны удовлетворять следующему условию финансовой эквивалентности:

$$\sum_{t=1}^{n} Y_t \cdot (1+i)^{-t} = D \qquad (4.1.5.1)$$

Выплаты Y_t охватывают средства D_t, предназначенные для амортизации основного долга, и проценты I_t, выплачиваемые на остаток долга на начало года t:

$$I_t = i(D - \sum_{k=1}^{t-1} D_k) \qquad (4.1.5.2)$$

При таком назначении текущих процентных выплат кредит будет погашен в течение предусмотренного срока n при условии, что сумма всех промежуточных возвратов долга D_t равняется величине займа D:

$$\sum_{t=1}^{n} D_t = D \qquad (4.1.5.3)$$

Рассмотрим поток произведенных в счет погашения долга срочных уплат $Y_1, Y_2, ..., Y_k$. Эти платежи покрывают «набежавшие» за k лет проценты и погашение части долга. Наращенная на конец k-го года величина выданной ссуды $D(1+i)^k$ содержит долг D и начисленные за тот же срок проценты. Эти же проценты присутствуют в выплатах $Y_1, Y_2, ..., Y_k$.

На момент k величина наращенной суммы будет:

$$S_k = \sum_{t=1}^{k} Y_t \cdot (1+i)^{k-t} \qquad (4.1.5.4)$$

Поэтому остаток долга L_k на конец любого года k будет равен:

$$L_k = D(1+i)^k - \sum_{t=1}^{k} Y_t \cdot (1+i)^{k-t} \qquad (4.1.5.5)$$

Пример 1: Долг в 600 000 сом решено погасить по специальному графику за 4 года. Ежегодные платежи по первым 3 годам определены в размере 150 000, 125 000 и 130 000 сомов. Ставка процента по долгу установлена на уровне 10%. Определите:

а) Остаток долга на конец 3-го (начало четвертого) года;

б) Величина четвертая срочной уплаты;

в) Ежегодные суммы погашения долга и процентов

Решение:

а) Согласно формуле (4.1.5.5) определим L_3

$L_3 = 600000 \cdot (1+0.1)^3 - 150000 \cdot (1+0.1)^2 - 125000 \cdot (1+0.1) - 130000 = 600000 \cdot 1.331 -$
$- 150000 \cdot 1.21 - 125000 \cdot 1.1 - 130000 = 798600 - 181500 - 137500 - 130000 = 798600 -$
$- 449000 = 349600 сом$

б) определим величину четвертой срочной уплаты по формуле:

$$Y_4 = L_3 \cdot (1+i) = 349600 \cdot 1{,}1 = 384560 \; сом$$

Этот результат можно получить, используя формулу

$Y_4 = D \cdot (1+i)^4 - Y_1 \cdot (1+i)^3 - Y_2 \cdot (1+i)^2 - Y_3 \cdot (1+i) = 600000 \cdot (1{,}1)^4 - 150000 \cdot (1{,}1)^3 -$
$- 125000 \cdot (1{,}1)^2 - 130000 \cdot 1{,}1 = 600000 \cdot 1{,}4641 - 150000 \cdot 1{,}331 - 125000 \cdot 1{,}21 - 130000 \cdot 1{,}1 =$
$= 878460 - 199650 - 15250 - 143000 = 878460 - 493900 = 384560 \; сом$

В обоих случаях получен одинаковый результат.

в) С помощью следующей таблицы будем иллюстрировать порядок расчетов выплат подолгу и процентам.

Год	Остаток долга на начало года $L_t = L_{t-1} - D_t$	Срочная уплата, $Y_t = D_t + I_t$	Выплата процентов $I_t = 0.1 \cdot L_t$	Выплата по долгу D_t
1	600000	150000	60000	90000
2	510000	125000	51000	74000
3	436000	130000	43600	86400
4	346600	173600	34960	138640

$d_t = D : n = 100000 : 3 = 33333{,}33 \; сома$.

Поскольку величина срочной уплаты при таком способе погашения долга меняется из года в год, то в этом случае без построения плана погашения долга в виде таблицы просто не обойтись.

Год	Долг (D)	Современная погашения долга (D_t)	Выплата процентов(I_t)	Величина срочной уплаты $(Y_t) = I_t + D_t$
1	100000	33333,33	10000	43333,34
2	66666,67	33333,33	6666,67	40000,00
3	33333,34	33333,34	3333,33	36666,67
итого	x	100000	20000	120000,00

$I_1 = D \cdot q = 100000 \cdot 0{,}1 = 10000 \; сомов$

$I_2 = D_1 \cdot q = 66666{,}67 \cdot 0{,}1 = 6666{,}67 \; сомов$

$$I_3 = D_2 \cdot q = 33333{,}34 \cdot 0{,}1 = 3333{,}34 \text{ сомов}$$

$$Y_1 = I_1 + d_1 = 10000 + 33333{,}33 = 43333{,}33$$

$$Y_2 = I_2 + d_2 = 66666{,}67 + 33333{,}33 = 40000$$

$$Y_3 = I_3 + d_3 = 33333{,}34 + 3333{,}33 = 36666{,}67$$

Таким образом, общие расходы по обслуживанию долга составляют 120000 сомов, а 100000 сомов погашение основывают суммы долга.

4.2 Потребительский кредит

В потребительском кредите на всю сумму кредита начисляется сразу по простой ставке.

$$I = D \cdot n \cdot i$$

Пусть кредит с размером D взят на n лет под годовую ставку простых процентов i. Сумма долга с процентами определяется формулой $Y = D(1 + ni)$ или $Y = D + I$

Размер срочной уплаты определяется по формуле:

$$\sum Y_i = (D + I) : (n \cdot m)$$

где n - срок кредита в годах;

m - количество взносов в течение года.

Пример 1: Потребительский кредит на сумму 36000 сом открыт на 3 года по ставке 22% годовых. Погашение кредита равными взносами ежеквартально. Определить стоимость кредита и размер ежеквартальных взносов.

Решение:

Определим общую сумму кредита, а это будет равным:

$$I = D \cdot n \cdot i = 36000 \cdot 3 \cdot 0{,}22 = 23760$$

Общая сумма расходов по обслуживанию кредита будет равна:

$$\sum Y_t = 36000 + 23760 = 59760$$

Тогда ежеквартальные взносы составляют величину:

$$\sum Y_t = (D + I):(n \cdot m) = (D + I):(n \cdot m) = 59760 : 3 \cdot 4 = 4980 \text{ сом}$$

Таким образом, ежеквартальные взносы в размере 4980 сома позволяют выплатить сумму долга и выплатить проценты.

Выше рассмотренное правило можно обобщить для n лет и m платежей в году:

$$N = m \cdot n \cdot [(m \cdot n + 1) : 2]$$

где N- сумма последовательных номеров выплат.

Тогда срочную уплату Y_t можно представить в виде суммы на процентные платежи и сумму погашения основного долга:

$$Y_t = I_t + d_t$$

где I_t-процентный платеж и она определяется формулой:

$$I_t = I \cdot (t / N)$$

d_t- сумма погашения основного долга представляется как разница срочной уплаты и процентных выплат:

$$d_t = Y_t - I_t$$

Вернемся к предыдущему примеру и расчленим срочную уплату на составляющие элементы.

План погашения потребительского кредита представлен в виде таблицы:

Платеж	**Долг** (D_t)	**t**	**Срочная уплата** (Y_t)	**Проценты** [$I_t = I/(t/N)$]	**Погашение основной суммы долга** ($d_t = Y_t - I_t$)
1	35000	12	4980	3655,38	1324,62
2	33675,38	11	4980	3350,77	1629,30
3	32046,08	10	4980	3046,15	1933,85
4	30112,23	9	4980	2741,54	2238,46

5	27873,77	8	4980	2436,92	2543,08
6	25330,69	7	4980	2132,31	2847,69
7	22483	6	4980	1827,69	3152,31
8	19330,69	5	4980	1523,08	3456,92
9	15873,77	4	4980	1218,46	3761,15
10	12112,62	3	4980	913,85	4066,15
11	8046,47	2	4980		

Пример 2: Покупатель приобрел потребительский кредит телевизор по цене 12000 сом. При оформлении кредита он внес 3000 сом, обязавшись погасить остальные в течение года, делая ежемесячно равные взносы. Определить:

а) сумму, которую покупатель должен выплачивать ежемесячно, если продавец требует за кредит 5% в год.

б) реальную доходность кредитной операции для продавца при условии, что имеется возможность месячного реинвестирования.

Решение:

а) сумма кредита с начисленными процентами составляет величину:

$$S = 12000(1 + 0,05 \cdot 1) = 12000 \cdot 1,05 = 12600$$

Следовательно, ежемесячно покупатель должен выплачивать продавцу 12600/12=1050 сом.

б) реальная доходность измеряется ставкой сложного процента. Обозначим номинальную годовую ставку сложного процента x=j/12. имеем уравнение $1050 \cdot [1-(1+x)^{-12}]/x = 12000$ здесь $x \neq -1$ и $x \neq 0$

Обозначим 1+x=z, x=z-1

$$1050 \cdot (1-z)^{-12} /(z^{\prime}) = 12000 \Rightarrow 1050 - 1050\frac{1}{z^{12}} = 12000z - 12000 \Rightarrow$$

$$12000z^{13} - 13050z^{12} + 1050 = 0$$

Это уравнение имеет два положительных корня, одним из них будет $z_1 = 1$, но это нас не удовлетворяет.

Второй положительный корень будет $z_2 = 1.0081$ погрешность равна 0.045

Отсюда $x = z - 1 = 0.008$.

Следовательно годовая ставка $z = 12x = 12(0.008) = 0,0012$

Таким образом, реальная доходность для кредитора *0.96%* превышает объявленную им простую ставку потребительского кредита 5% на 4.6%

УПРАЖНЕНИЯ

1. Кредит, в размере 220000 сом, выдан 2 апреля до 15 декабря под 12% годовых, год високосный. Определить размер наращенной суммы для различных вариантов (обыкновенного и точного расчета процентов.)

2. Кредит в размере 320000 сом выдается на 4,5 года. Ставка процентов за первый год 12%, а за каждые последующие полугодия она увеличивается на 3%. Определите множитель наращения и наращенную сумму.

3. Кредит выдается под простую ставку 15% годовых на 300 дней. Рассчитать сумму, получаемую кредиторами, и сумму процентных денег, если величина кредита составляет 120000 сом.

4. Кредит выдается на 1 год по простой учетной ставке 10% годовых. Рассчитать сумму, получаемую заемщиком, и величину дисконта. Если требуется возвратить 250000 сом.

5. Кредит в размере 15000 сом выдается по учетной ставке 10% годовых. Определить срок, на который представляется кредит если заемщик желает получить 190000 сом.

6. Коммерческий банк принимает вклады населения сроком на 90 дней при условии 10% годовых. Годовой ожидаемый уровень инфляции составляет 8%. Определить простую процентную ставку с учетом инфляции и коэффициент наращения, приняв k=365 дней.

7. Кредитное соглашение агропромышленного комплекса с банком предусматривает, что за первый год АПК уплачивает 25% годовых. В каждом последующем полугодии ставка повышается на 1,5%. Срок сделки 3 года. Сумма кредита 10 млн. сом. Проценты

обыкновенные с приближенным сроком кредита. Определить сумму возврата кредита через 3 года а так же доход банка.

8. Акционерное общество по техническим культурам по внедрению инновационной технологии планирует получит краткосрочный кредит в банке под 12% годовых. Год не високосный. Кредит на 12млн сом планируется с 15 января по 15 марта включительно.
Определить:

- возможные варианты долга по точным процентам с точным числом кредита дней кредита;
- по обыкновенным процентам с точным числом дней кредита;
- по обыкновенным процентам с приближенным числом дней кредита.

Выяснить какая сделка будет выгодна АО, а какая – банку.

9. Банк выдал кредит в сумме 150 000 сом под 12% годовых на 3 года. Для его погашения единовременным платежом одновременно с получением ссуды создается фонд. На размещаемые в нем средства начисляются проценты (13% годовых), причем погасительный фонд ежегодно вносятся равные суммы. Найти срочные расходы должные на протяжении 3 года для двух вариантов погашения процентов:
а) ежегодно;
б) разовым платежом в конце срока.

10. Кредит в сумме 50 000 сом выдан на 6 месяцев под 25% годовых (проценты простые). Погашение задолженности производится ежемесячными платежами. Составить план погашения задолженности.

11. Сумма 50 000 сомов выдана под 15% годовых на 4 года. Определить величину срочной уплаты при погашении основной части суммы долга равными частями и построить план погашения задолженности.

12. Долг 250 000 сомов выдан под 5% годовых на 4 года, с ежегодной выплатой процентов по долгу. Для погашения суммы долга единовременно платежом создается фонд, куда ежегодно вносятся равные суммы, на которую начисляется проценты по

ставке 10%. Найти ежегодные расходы должника и составить таблицу, в которой отражаются все основные характеристики обслуживания долга.

13. Рассмотрим предыдущей пример изменив условия: погашения единовременным платежом, как сумма основного долга, так и выплаты процентов.
Определить:

- Величина срочной уплаты;
- Общая сумма расходов по обслуживанию долга;
- Для более наглядного представления плана погашения долга составить таблицы.

14. Сумма 450 000 сомов выдана под 13% годовых на 5 лет. Определить величину срочной уплаты при погашении основной суммы долга равным срочным выплатами и разработать план погашения основной чатси долга равными частями.

15. Кредит в размере 450 тыс. сомов сроком на 5 лет взята под ставку 5% годовых. Составить план погашения равными срочными уплатами.

16. Долг в сумме 250 тыс. сомов необходимо погасить за 4 года равными суммами, которые выплачиваются в конце года. За заем начисляются проценты по годовой ставке 12%. Составить план погашения.

17. Если взять долг в размере 150 тыс. сомов, необходимо погасить равными суммами за 4 года, платежом в конце года. За заем выплачивается 5% то требуется составить план погашения долга.

18. Ссуда в 180 000 тыс. сомов выдана под 10% годовых и согласно договору ежемесячной оплаты по 220 тыс. сомов и выплаты остатка долга к концу срока в 4 года. Определить остаток долга.

19. Ссуда выдается сроком на 2 года под 10% простых годовых. Определить доходность этой операции при следующих условиях:
а) комиссионные ссуды;
б) удерживаются комиссионные в размере 0,5% от суммы ссуды;

в) удерживаются комиссионные в размере 0,5% от суммы ссуды и срок ссуды увеличен до 4 лет.

20. Продавец реализовал некоторый товар за 120 тыс. сомов и предоставил покупателю кредит на всю эту сумму на 4 года. Кредит должен быть погашен равными ежемесячными платежами. За него взимаются 5% годовых(простых). Определить доходность этой операции для продавца.

21. Потребительский кредит выдан на 3 года на сумму 450 000 сом по ставке 12%. Определить доходность этой ссуды в виде годовой ставки сложного процента.

22. На покупку квартиры господин Иванов взял потребительский кредит 25 тыс. долларов на 10 лет под 10% простых процентов. Ему нужно погашать равными ежеквартальными выплатами. Найти:
а) размер выплат.
б) чему равна годовая ставка сложного процента. Под которую выдан кредит.

23. Домостроительная фирма продала дом за 2 млн. сом предоставив покупателю потребительский кредит на 5 лет по простой ставке 10%. Согласно договору этот кредит дожжен быть погашен равными ежегодными выплатами. Определить доходность этой операции для домостроительной фирмы.

24. Потребительский кредит на сумму 250 000 сомов открыт на 4 года по ставке 12% годовых. Погашение кредита равными взносами ежеквартально. Определить стоимость кредита и размер ежеквартальных взносов.

25. Фирма взяла в банке кредит 10 млн. сомов сроком на 4 года под 20% годовых. Кредит и проценты по нему должны погашаться равными ежегодными платежами в течении этих 4 лет. Требуется определить размер ежегодных платежей при использовании простых и сложных процентов.

26. Фирма взяла в банке кредит 10 млн. сом сроком на два года под 40 % годовых. Погашение кредита и процентов производится

ежеквартально в течение всего срока одинаковыми по величине платежами. Определите величину ежеквартальных платежей при использовании в расчете сложных процентов.

27. Банком выдан кредит в сумму 1.5 млн. сом сроком на 5 лет под годовую процентную ставку 50%, но при ежеквартальном начислении процентов. Требуется определить возвращаемую сумму через пять лет.

28. Долг, равный 250 000 сом, необходимо погасить равными суммами за 5 лет, платежами в конце года. За заем выплачивается проценты по ставке 5%. Составьте план погашения долга.
29. Долг в сумме 600 000 сом требуется погасить за 5 лет равными суммами, выплачиваемыми в конце года. За заем начисляются проценты по годовой ставке 10 %. Составить план погашения долга.

4.3 Ипотечные ссуды

Ипотеки получили широкое распространение в странах с развитой рыночной экономикой. Она является очень распространенным методом кредита. Кредитор предполагает равные взносы должника, взносы ежемесячные постнумерандо или пренумерандо. В договоры устанавливается ежемесячная ставка процента, очень редко используется годовая номинальная. Ипотечная ссуда состоит из нескольких видов. Они различаются методом погашения задолженности.

4.3.1. Стандартная ипотека

Ипотечная ссуда выдается под залог недвижимость и имеет длительный срок погашения. Под залог недвижимости заемщик получает от залогодержателя (кредитора) некоторую сумму. Он погашает долг вместе с процентами равными, обычно ежемесячными взносами. Взносы могут быть постнумерандо или пренумерандо.

Рассмотрим ипотечные ссуды при покупке (или строительстве) объекта. Здесь участвуют три агента: продавец, покупатель (должник) кредитор. Так, например продавец получает от покупателя за некоторое имущество его стоимость(690000 сом). Для того, чтобы расплатиться, покупатель получает ссуду залог этого имущества (620000 сом) и добавляет собственные средства (70000 сом). Задача в данном моменте заключается в определении размера ежемесячных погасительных платежей R и остатка задолженности на очередное её погашение, вплоть до полного погашения долга. Сейчас занимаемся определением формулы для ежемесячных расходов должника, проценты за первый месяц, план погашения долга и т.д. Пусть D – общая сумма ипотечного кредита, n – срок ипотеки в годах, R – погасительные платежи, которые вносятся ежемесячно, а через N обозначим общее количество платежей и $N=12n$, i - месячная процентная ставка.

Размер срочной оплаты для постнумерандо определяется формулой:

$$R = D : a_{n;i} \tag{4.3.1.1}$$

где
$$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{4.3.1.2}$$

Из величины срочной уплаты выплачиваются проценты, а остаток идет на погашение долга. В t-м времени сумма, которая идет на погашение задолженности. Это и математически представляется в виде:

$$d_t = d_{t-1}\cdot(1+i) = d_{t-2}\cdot(1+i)^2 = \ldots = d_1\cdot(1+i)^{t-1} \tag{4.3.1.3}$$

где t_1 определяется по формуле:

$$d_1 = R - D\cdot i \tag{4.3.1.4}$$

Определим сумму погашенной задолженности за t месяцев:

$$W_t = \sum_{k=1}^{t} d_t = d_1\cdot\sum_{k=1}^{t}(1+i)^{k-1} = d_1[1+(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{t-1}] =$$

$$= d_1\cdot\frac{(1+i)^t-1}{i} = d_1\cdot A_{t;i} \tag{4.3.1.5}$$

Остаток долга на начало $(t+1)$-го месяца определяется формулой:

$$D_t = D - W_t = D - d_1 \cdot A_{t,i} = D - (R - Di) \cdot A_{t,i} \qquad (4.3.1.6)$$

Пример 1: Ипотечная ссуда в размере 690 000 сомов выдана на 15 лет. Погашение в конце каждого месяца, номинальная годовая ставка -12%. Определить сумму ежемесячного платежа и остаток долга на конец 5-го года погашения.

Решение:

По условию задачи равные ежемесячные выплаты размером R образуют простую ренту длительности $n = 15 \cdot 12 = 180$ единичных периодов (месяцев) начисления процента под ставку $i=12\%/12=1\%$

Традиционная ипотечная ссуда погашается равными ежемесячными выплатами, на которые ежемесячно платежа Y и остатка L_k долга после очередного взноса определяется формулами:

$$Y = \frac{D \cdot i/m}{1-(1+i/m)^{-nm}} \qquad (4.3.1.7)$$

$$L_k = D \cdot (1+i)^k - \sum_{t=1}^{k} Y_t \cdot (1+i)^{k-t} \qquad (4.3.1.8)$$

В нашем случае

$$Y = \frac{D \cdot i/12}{1-(1+i/12)^{-12n}} \qquad L_k = D \cdot (1+i/12)^k - Y \cdot S(k_{j,i}/12) \qquad (4.3.1.9)$$

Наращенная сумма будет

$$S(Y) = Y\frac{(1+0{,}01)^{180}-1}{0{,}01} \qquad (4.3.1.10)$$

и для определения Y имеем еще одну формулу

$$S(Y) = 690000 \cdot (1+0.01)^{180} \qquad (2.1.11)$$

Из (2.1.10) и (2.1.11), имеем:

$$Y \cdot 100[(1+0{,}01)^{180}-1]=690000\cdot(1.1)^{180} \qquad \text{или}$$

$$Y=\frac{690000\cdot 5{,}9958}{100\cdot(5{,}9958-1)}=\frac{690000\cdot 5{,}9958}{100\cdot 4{,}9958}=\frac{69\cdot 59958}{499{,}58}=\frac{4137102}{499{,}58}\approx 8281{,}16 \text{ сома}$$

Таким образом, ежемесячный взнос будет равным: 8,281 сом

Наращенная за 5 лет величина ссуды при условии помесячного начисления процентов составит сумму

$$S_5=690000\cdot[(1+0{,}01)^{60}]=690000\cdot 1{,}816761=1253567{,}1 \text{ сом}$$

Наращенная величина произведенных выплат будет

$$8{,}281{,}16\cdot 100(1{,}01^{60}-1)=828116\cdot 0{,}8167611=676372{,}94$$

Тогда остаток L_5 будет равным:

$$L_5=1253567{,}1-676372{,}94=577194{,}16 \text{ сом}$$

4.3.2. Нестандартные ипотеки

Рассмотрим вопрос ипотеки с ростом платежей. В этом случае, предусматривается постоянный рост расходов по обслуживанию долга в первые десять лет. В оставшееся время погашение производится постоянным взносом. Весь срок погашения ссуды разделим на два интервала с протяженностью m и M месяцев.

В первом месяце расходы растут с постоянным темпом роста q:

$$R_t=R_1\cdot q^{t-1} \qquad (4.3.2.1)$$

где R_1 расходы в первом месяце;

q - ежемесячный темп роста расходов

во втором периоде расходы должника равна постоянной величине:

$$R=R_1\cdot q^{m-1}=R_m \qquad (4.3.2.2)$$

Определим современную стоимость платежей каждого периода относительно начала действия контракта.

В первом периоде последовательность платежей представляет геометрическую прогрессию, а современная стоимость этого потока будет равной:

$$A_1 = R_1 \cdot v + R_1 q v^2 + ... + R_1 q^{m-1} v^m = R_1 v \cdot \frac{(qv)^m - 1}{qv - 1} \qquad (4.3.2.3)$$

где $v = \frac{1}{1+i}$

Во втором периоде платежи представляют собой отложенную постоянную ренту с членом $R = R_1 \cdot q^{m-1}$

На начало действия контракта современная стоимость этой ренты будет равной:

$$A_2 = R \cdot PVIFA_{i,m} \cdot v^m = R_1 \cdot q^{m-1} \cdot PVIFA_{i,m} \cdot v^m \qquad (4.3.2.4)$$

Тогда общая сумма ипотечного кредита D определяется в виде:

$$D = A_1 + A_2 = R_1 v \cdot \frac{(qv)^m - 1}{qv - 1} + R_1 q^{m-1} \cdot PVIFA_{i,m} \cdot v^m$$

Отсюда

$$R_1 = \frac{D(1+i)}{\frac{(qv)^m - 1}{qv - 1} + (qv)^{m-1} PVIFA_{i,m}} \qquad (4.3.2.5)$$

где

$$PVIFA_{i,m} = \frac{(1+i)^M - 1}{i(1+i)^M} \qquad (4.3.2.6)$$

<u>Пример 1</u>: Сумма задолженности по договору ипотеки – 100000 сом, общий срок погашения – 20 лет (240 месяцев), предусматривается рост платежей в течение 60 месяцев, процентная ставка за ссуду – 10% годовых, ежегодный прирост платежей – 5%. Разработать график погашения долга.

<u>Решение</u>:

По условию задачи известно, что:

$D=100\ 000сом.$ $m=60,$ $M=180,$ $i=0,1/12=0,0083333,$

$$v=\frac{1}{1+i}=\frac{1}{1,0083333}=0,9917355$$

Ежемесячный темп роста расходов в первом периоде будет:

$$q=\sqrt[12]{1,05}=(1+0,05)^{\frac{1}{12}}\approx 1+\frac{1}{12}\cdot 0,05+\frac{\frac{1}{12}\cdot(\frac{1}{12}-1)}{2!}(0,05)^2+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{12}\cdot(\frac{1}{12}-1)\cdot(\frac{1}{12}-2)\cdot$$

$$\cdot(0,05)^3\approx 1,0041187$$

$$qv=0,99582016$$

$$PVIFA_{0,83333\%,180}=\frac{(1+0.00833)^{180}-1}{0.00833\cdot(1+0,00833)^{180}} \qquad (4.3.2.7)$$

Для вычисления $(1+0,00833)^{180}$, воспользуемся формулой:

$$(1+x)^{\lambda}=1+\lambda x+\frac{\lambda\cdot(\lambda-1)}{2!}x^2+\frac{\lambda\cdot(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}x^3+\ldots$$

Где x=0.00833; $\lambda=180$

Но

$$(1,00833)^{180}=1+180\cdot 0.00833+\frac{180\cdot 179}{2}(0.00833)^2=1+1.4994+1.117855=3.617255$$

Поэтому

$$PVIFA_{0.83333\%,180}=\frac{2.617255}{0.00833\cdot 3.617255}=\frac{2.617255}{0.0301317}=86.860516$$

Тогда величину взноса первого месяца:

$$R_1=\frac{100000\cdot 1.0083333}{\frac{0.9958201^{60}-1}{0,9958201-1}+0,9958201^{59}\cdot 86,860516}=\frac{1,00833,33}{\frac{0,777775-1}{-0,0041799}+0,781039\cdot 86,860516}=$$

$$=\frac{10833,33}{63,1651475+67,8414459}=\frac{100833,33}{121,0065934}=833,287899\approx 833,288$$

Таким образом, ежемесячные расходы в первом месяце определяются как: $833,288\times 1.0041187^{t-1}$

Расход в конце пятилетнего периода

$$R_{(4)} = 833.288 \cdot 1.0041187^{(60-1)} = 833.288 \cdot 1.274421 \approx 1061.96 \text{ сом}$$

Эта же сумма ежемесячно выплачивается и во втором периоде.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Под залог недвижимости выдана на 10 лет ссуда в размере 250 000 сом. Погашение ежемесячное, поснумерандо, на долг начисляются проценты по номинальной ставке 10%.
Определить:
- Ежемесячные расходы должника;
- План погашения долга, тыс. сом;
- Остаток долга на начало 118-го месяца.

2. Ипотека задана следующим условием: *D=1 000 000 сом; B=100 000 сом; i=21%; N=120.* Найти размер срочной уплаты.
3. Сумма задолженности по договору ипотеки – 250 000 сом. Общий срок погашения 15 лет (180 месяцев, предусматривается прост платежей в течение 48 месяцев; процентная ставка ссуду – 10% годовых; ежегодный прирост платежей 5%. Необходимо разработать график погашения долга.
4. Стоимость закладываемого имущества- 180 тыс. сом. Продавец получает за счет ссуды 130 тыс. сом. Срок ипотеки 10 лет. Покупатели открывает специальный счет (20 000 сом). На счет начисляются проценты по ставке (начисление ежемесячно) Списание производится 20 месяцев сумма списания уменьшается на 2% в месяц.
Составить план погашения кредита.
5. Ипотека задана следующими условиями:
- Общая сумма ипотечного кредита D=450 000 сом;
- N=60 общее число платежей
- $n = 5$ - срок ипотеки (лет)
- $i = 10\%$ месячная процентная ставка.

Определить размер ежемесячных платежей и остального долга на начало 58-го месяца.
6. Ипотека задана условием:

D=250 000 сом; n=10; R=1250; i=1%; N=120.

Найти размер ежемесячного платежа.

7. ипотечный кредит выдан на 20 лет, размер кредита (20 000+1000n) сом, ставка 6% годовых. Погашения будет происходить ежемесячно равными срочными уплатами по 1000 сом. Рассчитайте размер «годового платежа»

8. Сумма ипотечного долга - 100 000n сом. Срок погашения 20 лет (240 месяцев) разбит на два периода продолжительностью; 1-й период m=60 месяцев; 2-й период n=180 месяцев. Процентная ставка – 6% годовых (проценты сложные) Погашения кредита производится ежемесячно. По условиям контракта ежегодный прирост срочных уплат 5% в первом периоде. Во втором периоде погашение производится равными срочными уплатами. Составьте план погашения кредита.

9. Размер ипотечного кредита D=(100 000+100n) сом. Срок ипотеки -10 лет.

Заемщик открывает специальный счет на сумму D/10 сом, на который начисляется ежемесячно процент по ставке 12% годовых. Списание средств со счета идет ежемесячно в течение двух лет, сумма списаний ежемесячно уменьшается на 2%. Ставка за кредит 6% годовых. Составьте план погашения кредита.

10. Ипотечная ссуда в размере 500 тыс. сом выдана сроком на 15 лет. Погашение - в конце каждого месяца, номинальная годовая ставка – 12%. Определить сумму ежемесячного платежа и остаток долга на конец пятого погашения.

Глава V. ОЦЕНКИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

5.1. Показатели эффекта и эффективности инвестиционных проектов

5.1.1. Чистый приведенный доход

При оценке инвестиционных проектов используется метод расчета чистого приведенного дохода, который предусматривает дисконтирование денежных потоков: все доходы и затраты приводиться к одному моменту времени.

Чистый приведенный доход состоит из разности текущей стоимости денежных потоков и текущей стоимости денежных оттоков.

Расчет чистого приведенного дохода осуществляется формулой:

$$NPV = \sum_{k=1}^{n} [R_k /(1+r)^k] - I \cdot C \qquad (5.1.1.1)$$

где R_k - годовые денежные поступления в течение n лет, k=1,2,3,…,n.

IC- стартовые инвестиции;

r - ставка дисконтирования.

Если проект предполагает на разовую инвестицию, а последовательные инвестирование финансированных ресурсов в течение m лет, то формула для расчета NPV модернизируется следующим образом:

$$NPV = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^k} - \sum_{j=1}^{m} \frac{IC_j}{(1+i)^j} \qquad (5.1.1.2)$$

где i- прогнозируемый средний уровень инфляций.

Общая накопленная величина дисконтированных доходов рассчитываются по формуле.

$$PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^k} \qquad (5.1.1.3)$$

где R_k - годовые доходы (k=1,2,…,n.)

Если:NPV>0, то проект следует принять;

NPV<0, то проект следует отвергнуть;

NPV=0, то проект ни прибыльный, ни убыточный.

Пример1. Требуется проанализировать проект со следующими характеристиками (млн. сом): -150, 30, 70, 70, 45.

Рассмотрим два случая:
А) цена капитала 12%

Б) ожидается, что цена капитала будет меняться по годам следующим образом: 12%, 13%, 14%, 14%.
Показать что проект приемлемый или нет.

Решение.
Для решения воспользуемся формулой (5.1.1.1)

$$NPV = -150 + \frac{30}{1+0.12} + \frac{70}{(1+0.12)^2} + \frac{70}{(1+0.12)^3} + \frac{45}{(1+0.12)^4} = -150 + 26.786 + 55.804 +$$

$$+ 49.8221 + 29.5987 = -150 + 161.0108 = 11.01 \text{млн.сом}$$

Отсюда следует, что проект является приемлемым. Во втором случае NPV находим прямым подсчетом

$$NPV = -150 + \frac{30}{1.12} + \frac{70}{1.12 \cdot 1.13} + \frac{70}{1.12 \cdot 1.13 \cdot 1.14} + \frac{45}{1.12 \cdot 1.13 \cdot 1.14^2} = -150 + 26.786 +$$

$$+ 55.310 + 48.5173 + 27.3589 = -150 + 157.9722 = 7.9722 \text{млн.сом}$$

Проект приемлем.

Пример 2: Фирма рассматривает целесообразность и инвестиционного проекта, стоимость которого составляет 10 млн. сомов. По прогнозам ежегодные поступления составлять 2,2 млн. сома. Проект рассчитан на 5 лет. Необходимая норма прибыли составляет 5%. Следует ли принять этот проект?

Решение:
Определим чистая стоимость проекта:

$$NPV = \frac{2.1}{1.05} + \frac{2.1}{(1.05)^2} + \frac{2.1}{(1.05)^3} + \frac{2.1}{(1.05)^4} + \frac{2.1}{(1.05)^5} - 10 = 2 + 1.99800 + 1.90286 +$$

$$+ 1.21672 - 10 \approx -2.97303$$

NPV<0, отсюда следует, что проект не может быть принят.

5.1.2. Срок окупаемости

Срок окупаемости – это продолжительность времени в течение которого дисконтирование на момент завершения инвестиции прогнозируемые денежные поступления равны сумме инвестиции. Если годовой приток денежных средств (доходы) одинаков и равен Q, а исходные инвестиции равны P, то срок окупаемый равен P/Q. Так например, если инвестируется 150 000 сом, а ежегодный доход равен 20 000 сом, то период окупаемости будет равным:

$$\frac{150000}{20000} = 7{,}5 \text{ лет}$$

Если годовые доходы не одинаковы, то срок окупаемости рассчитать сложнее.

Пример 3: Фирма выясняет возможность производства новой продукции. Для того чтобы запустить проект, необходимо потратить в начальный момент 150 000 сом, на организации производства и на рекламную компанию через год еще 100 000 сом. Во второй, третий и четвертый годы реализации новой продукции принесет доход в размерах, соответственно 80 000 сом, 185 000 сом и 110 000 сом. В пятом году продукция перестанет быть популярной, и доход упадет до 5 000 сом.

Определить срок окупаемости проекта.

Решение:

Инвестиции проекта 250 000 сом. К концу второго года окупится 80 000 сом и остается 170 000 сом. Окупятся за часть третьего года, равную 170/185=0,92.

Таким образом срок окупаемости проекта будет равным

2+0,92=2,92 сом

Главным недостатком этого метода определению срока окупаемости состоит в том, что не учитываются денежные потоки после срока окупаемости.

Другой недостаток этого метода является, что пределы срока окупаемости не учитывает распределение денежного потока во времени.

5.1.3. Внутренняя норма доходности

При анализе эффективности инвестиционных проектов можно использовать показатель внутренней нормы доходности -IRR. Внутренняя норма доходности проекта есть процентная ставка, при дисконтировании по которой чистая современная ценность проекта равна нулю, т.е. NPV=0. Если инвестиционный проект состоит из потока платежей:

$C_0, C_1, C_2, ..., C_n$

И платеж C_t происходит в год t (t=0,1,2,…, n), то внутренняя норма доходности r является корнем уравнения:

$$\sum_{t=0}^{\infty} C_t \frac{1}{(1+r)^t} = 0 \qquad (5.1.3.1)$$

Выбираются два значения коэффициента дисконтирования, при функции NPV меняет свой знак, и используем формулу:

$$IRR = i_1 + NPV(i_1)/[NPV(i_1) - NPV(i_2)] \cdot (i_2 - i_1) \qquad (5.1.3.2)$$

Инвестор сравнивает полученное значение IRR со ставкой привлеченных финансовых ресурсов CC:

- Если IRR>CC, то проект можно принять;
- Если IRR<CC, проект отвергается;
- IRR=CC проект имеет нулевую прибыль.

Пример 1: Если затраты некоторой фирмы составляет 1 млн. 800 тыс. сом, а доходы: 75; 300; 675; 750; 900 тыс. сом. Рассчитать внутреннюю ставку доходности по проекту.

Решение:

Осуществляем расчет по ставке 5%;

$$NPV = -1800000 + \frac{75000}{1+0,05} + \frac{300000}{(1+0,05)^2} + \frac{675000}{(1+0,05)^3} + \frac{750000}{(1+0,05)^4} + \frac{900000}{(1+0,05)^5} = -1800000 +$$
$$+714286 + 2721088 + 583090 + 617027 + 705174 = 5340665 - 1800000 = 3540665$$

Отсюда видно, что NPV>0, поэтому новая ставка должна быть больше 5%.

Производим расчет по ставке 15%:

$$NPV = -1800000 + \frac{75000}{1{,}15} + \frac{300000}{(1{,}15)^2} + \frac{675000}{(1{,}15)^3} + \frac{750000}{(1{,}15)^4} + \frac{900000}{(1{,}15)^5} = -1800000 + 61217 +$$
$$+ 226843 + 443816 + 428816 + 447461 = 1628153 - 1800000 = -191847$$

Вычисляем внутреннюю ставку доходности:

$$IRR = 5 + \{5160665/[5160665 - (-191847)\} \cdot (15 - 5) = 14{,}64$$

Таким образом внутренняя норма доходности проекта равна 14,64%.

Теперь, необходимо уточнить величину ставки.

Для процентной ставки12%:

$$NPV = -1800000 + \frac{75000}{1{,}12} + \frac{300000}{(1{,}12)^2} + \frac{675000}{(1{,}12)^3} + \frac{750000}{(1{,}12)^4} + \frac{900000}{(1{,}12)^5} = -1800000 + 669643 +$$
$$+ 239158 + 480427 + 476638 + 510685 = 2376551 - 1800000 = 576551$$

Для процентной ставки 13%:

$$NPV = -1800000 + \frac{75000}{1{,}13} + \frac{300000}{(1{,}13)^2} + \frac{675000}{(1{,}13)^3} + \frac{750000}{(1{,}13)^4} + \frac{900000}{(1{,}13)^5} = 66372 + 234944 + 467808 +$$
$$+ 453382 + 488422 - 1800000 = 1717528 - 1800000 = -82472$$

Уточненная величина:

$$IRR = 12 + \{576551/[576551 - (-82472)\} \cdot (13 - 12) = 12{,}87\%$$

Ставка 12,87% является верхним пределом процентной ставки по которой фирма может окупить кредит для финансирования инвестиционного проекта.

5.2. Модифицирована внутренняя норма доходности

Современная величина инвестирования в проекте средств определяется формулой:

$$I(o) = \sum I_t (1+i)^{-t} \qquad (5.2.1)$$

Будущая стоимость чистых доходов (на завершающую дату проекта):

$$S(n) = \sum E_t (1+i)^{n-t} \qquad (5.2.2)$$

Тогда показатель MIRR определяется эффективной ставкой процента, которая, исходя из начальной суммы I(o), позволяет получить финансовый результат S(n):

$$MIRR = \left[\frac{S(n)}{I(o)}\right]^{1/n} - 1 \qquad (5.2.3)$$

Пример 1: Пусть дан проект со следующими потоками денежных средств:

Год	0-й	1-й	2-й
Денежный поток	-100	200	-75

Определить критерий модифицированной внутренней нормы доходности, если альтернативные издержки равны 20 %.

Решение:
Найдем по формуле (5.2.1) и (5.2.2) значения I(o) и S(2):

$$I(o) = 100 + 75 \cdot (1+0{,}2)^{-2} = 100 + \frac{75}{1{,}44} \approx 152{,}08$$

$$S(2) = 200 \cdot 1{,}2 = 240$$

Тогда пользуясь формулой (5.2.3), вычислим величину MIRR:

$$MIRR = \left[\frac{S(2)}{I(o)}\right]^{1/2} - 1 = \left[\frac{240}{152{,}08}\right]^{1/2} - 1 = (1{,}578)^{1/2} - 1 \approx 1{,}256 - 1 = 0{,}256 = 25{,}6\%$$

5.3. Влияние инфляции на инвестиционный проект

При оценке эффективности капитальных вложений, необходимо учитывать влияние инфляции. Если предприниматель готов сделать инвестицию исходя из 10% годовых, то это означает, что 1 500 000сом, в начале года и 1 650 000сом в конце года имеют для предпринимателя одинаковую ценность. Если допустить, что имеет место инфляция в размере 5% в год. То для того чтобы сохранить покупательную способность полученного в конце года денежного поступления 1 650 000 сом, необходимо откорректировать эту величину на индекс инфляции.

$1{,}65 \times 1{,}05 = 1{,}7325$ млн. сом.

Таким образом, для обеспечения желаемого дохода предприниматель должен использовать в расчетах не 10%-ый рост капитала, а другую величину индекса инфляции:

$1{,}10 \times 1{,}05 = 1{,}155$

Исходя из этого примера можно написать общую формулу:

$$1+p=(1+r)\cdot(1+i) \qquad (5.3.1)$$

где r- коэффициент дисконтирования;

i- индекс инфляции;

p- номинальный коэффициент дисконтирования

Формула (5.3.1) в силу малости $r \cdot i$ можно упростить в виде:

$$p=r+i \qquad (5.3.2)$$

Пример 1. Рассматривается экономическая целесообразность реализации проекта при следующих условиях: величина инвестиций – 7,5 млн. сом, период реализации 3 года; доходы по годам (в тыс. сом)-3000, 3750; текущий коэффициент дисконтирования (без учета инфляции) -9.5%; среднегодовой индекс инфляции 5%.

Определить:

1. Чистый приведенный доход без учета инфляции (NPV)
2. Чистый приведенный доход с использованием модифицированного коэффициента дисконтирования p=15% (т.к. $1{,}095 \cdot 1{,}05 = 1{,}15$)

3. Внутреннюю норму доходности (IRR)

Решение:

1. Без учета инфляции:

$$NPV = \frac{3000}{1{,}095} + \frac{3000}{(1{,}095)^2} + \frac{3750}{(1{,}095)^3} - 7500 = 2740 + 2502 + 2856 - 7500 = 8098 - 7500 =$$

$$= 598 \text{ тыс.сом}$$

2. Учитывая модифицированный коэффициент дисконтирования р=15%, определим NPV:

$$NPV = \frac{3000}{1{,}15} + \frac{3000}{(1{,}15)^2} + \frac{3750}{(1{,}15)^3} - 7500 = 2609 + 2268 + 2466 - 7500 = 7343 - 7500 =$$

$$= -157 \text{ тыс. сом}$$

3. Определение IRR

$$IRR = 9{,}5 + \{598/[598 - (-157)]\} \cdot (1{,}15 - 9{,}5) = 15{,}7\%$$

Если инфляция составляет i% в год, то цены ресурсов, используемых при реализации проекта в году t и цены, по которым реализуется произведенная в этом году продукция проекта, умножаются на множитель $(1+i)^t$. Поэтому все члены потока платежей, порожденного инвестиционным проектом, должны быть умножены на этот множитель. Тогда инвестиционный проект определяется в виде:

$$C_0 \qquad C_1 \cdot (1+i) \qquad C_2 \cdot (1+i)^2 \quad \ldots \quad C_n (1+i)^n$$

$$0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad \ldots \qquad n \qquad t \text{ лет}$$

Средняя норма прибыли регулярного проекта при инфляции увеличивается, так как доходы увеличиваются в большей степени, чем инвестиции.

Пример 2: Фирма планирует производства новой продукции. Для реализации проекта, необходимо потратить в начальный момент 150 тыс. сом. На организацию производства и на рекламную компанию через год еще 150 тыс. сом. Во второй, третий, и четвертый год реализации новой продукции принесет доход соответственно: 105, 270, 135, тыс. сом. В 5-ом году продукция перестанет быть популярной, и доход упадет до 15 тыс. сомов. Дальнейший выпуск этой продукции не предполагается. Вычислить внутреннюю норму доходности.

Решение:

Внутренняя норма доходности данного проекта является корнем уравнения:

$$-150 - \frac{-150}{1+r} + \frac{105}{(1+r)^2} + \frac{270}{(1+r)^3} + \frac{135}{(1+r)^4} + \frac{15}{(1+r)^5} = 0$$

или $$150t^5 + 150t^4 - 105t^3 - 270t^2 - 135t - 15 = 0 \qquad (5.3.3)$$

где t=1+r

Для решения этого уравнения можно применить метод линейной интерполяции, но можно гораздо проще воспользоваться командой *Подбор параметра* в Excel. Выполнить на компьютере команду *Подбор параметра,* для уравнения (5.3.3), получим корень уравнения в виде:

t=1,24206145613456075420 с точностью 1,7101E-07

Тогда внутренняя норма доходности r будет равна:

$$r = 0{,}242061456 \approx 0{,}24$$

Пример 3: Найдем среднюю норму прибыли на инвестиции и срок окупаемости из примера 2, если инфляция составит 5% в год.

Решение:

Осуществляем вычисление потока платежей из примера 2 с учетом инфляции:

$C_0 = -150;\ \ C_1 - 150\cdot(1+0{,}05) = -157{,}5$

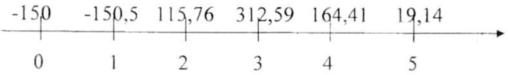
$C_2 = 105\cdot(1+0{,}05)^2 = 105\cdot 1{,}1025 = 115{,}7625 \approx 115{,}76$

$C_3 = 270\cdot(1+0{,}05)^3 = 312{,}55875 \approx 312{,}59$

$C_4 = 135\cdot(1+0{,}05)^4 = 164{,}41$

$C_5 = 15\cdot(1+0{,}05)^5 = 19{,}14$

Изобразим теперь на оси времени этот поток платежей



Среднегодовая балансовая прибыль за пятилетний период реализации данного проекта равна:

$$\frac{115,76+312,59+164,41+19,14}{5}=122,38\ \textit{тыс.сом}$$

Инвестиции в данный проект равны:

150+157,5=307,5

Средняя норма прибыли на инвестиции равна:

$$\frac{122,38}{307,5}=0,398=39,8\%$$

Определим среднюю норму прибыли на инвестиции без учета инфляции.

Среднегодовая балансовая прибыль за пятилетие равна:

$$\frac{105+270+135+15}{5}=105000\ \text{СОМ}$$

Инвестиции в данный проект составляют 150+150=300 тыс. сом

Средняя норма прибыли на инвестиции равна:

$$\frac{105}{300}\cdot 100\%=35\%$$

Отсюда следует, что средняя норма прибыли на инвестиции увеличилась на 4,8%. Определим период окупаемости проекта без учета инфляции.

Инвестиции в проект равны 300 000 сом. К концу второго года окупится 105тыс. сом и останется 195 тыс. сом которые окупятся за часть третьего года, равную 195/270=0,72года.

Тогда период окупаемости инвестиционного проекта будет 2+0,72 года.

Найдем теперь период окупаемости проекта с учетом инфляции. Сумма инвестиций равна 305,5 сом. К концу второго года окупятся 115,76 тыс. сом, останется 305,5-115,76=189,74 тыс. сом, которые окупятся за часть третьего года, равную:

$$\frac{185,74}{312,59}=0,59\ \textit{года}$$

Следовательно, период окупаемости всего проекта равен: 2+0,59=2,59 года.

Таким образом, период окупаемости проекта с учетом инфляции меньше, чем без учета инфляции на 0,13 года.

Можно показать, что инфляция не влияет на величину чистой современной стоимости (NPV) проектов.

$$NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

Здесь $C_t = R_t - Z_t$, где R_t - доходы, Z_t - затраты в году t.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Перерабатывающее предприятие планирует переработать сельскохозяйственную продукцию. Для этого ими разработан инвестиционный проект. Чтобы запустить проект понадобиться потратить в начальный момент 2 млн. сом на организацию производства и на рекламную компанию через год еще 1 млн. сом. Во второй, третий и четвертые годы при реализации новой переработанной сельхоз продукции принесут доход в размере, соответственно 250 000 сом, 1 115 000 сом и 1 млн. сом. В 5-ом году продукция перестанет быть популярной и доход упадет до 150 000 сом. Найти чистую современную ценность инвестиционного проекта, если ставка дисконтирования r=10%.
2. Вычислить значение функции NPV при Z=0%,90%,30% ,40% и построить график функции NPV инвестиционного проекта.
3. Промышленная компания по производству подъемного оборудования решила построить новый цех для выпуска малых подъемников для универсамов. Проект предполагает вложение немедленно 450 000 сом в постройку здания цеха. В начале второго года необходимо вложить 3000 000 сом для закупки и установки оборудования, а в начале третьего года придется потратить 75 000 сом на рекламу новой продукции. В 3-ем, 4-ом, 5-ом и 6-ом годах реализация новой продукции принесет прибыль, соответственно равную 600 000 сом, 900 000 сом, 1050000 сом и 300000 сом. После этого выпуск малых подъемников прекращается, так как спрос на них будет удовлетворен.

   Определить:

   1. Срок окупаемости проекта.
   2. Рассчитать внутреннюю ставку доходности по проекту по ставке дисконтирования r=10%.

3. Изобразите этот инвестиционный проект на оси времени и на диаграмме.
4. Вычислите среднюю норму прибыли на инвестиции проектов с учетом инфляции 5% в год.

4. Вычислите чистую современную ценность (NPV) инвестиционного проекта из упражнения 2 при ставке дисконтирования r=10%. (в момент 0)
5. Вычислите чистую современную ценность (NPV) проекта из упражнения 2 при следующих ставках: а) 0%, б) 20%, в) 30%, г) 40%, д) 50% Постройте график функции NPV(r).
6. Проанализируйте проект со следующими характеристиками (млн. сом)

   -225, 50, 95, 95, 50.

   Для двух случаев

   а) цена капитала 14%

   б) ожидается, что цена капитала будет меняться по годам следующим образом: 14%, 15%, 16%, 16%.
7. Требуется рассчитать значение показателя IRR для проекта, рассчитанного на три года, требующего инвестиций 10 млн. сом и имеющего предполагаемые денежные поступления в размере 3 млн. сом, 4 млн. сом, 7 млн. сом. Определить также общую накопленную величину дисконтированных доходов (PV). Для расчета показателей IRR взять коэффициенты дисконтирования: r=10% r=20%, а для уточнения полученные значения взять r=16% и r=17%.
8. Пусть, исходные данные и аналитические коэффициенты по нескольким альтернативным проектам приведены в следующей таблице:

Год	*Денежные потоки*			
	Проект 1	**Проект 2**	**Проект 3**	**Проект 4**
0-й	-1200	-1200	-1200	-1200
1-й	0	100	300	300
2-й	100	300	450	900
3-й	250	500	500	500
4-й	1200	600	600	250
5-й	1300	1300	700	100

Определить для каждого проекта NPV и IRR. Выбрать один из этих проектов, если финансирования выбранного проекта осуществлено за счет ссуды банка под 12% годовых (для простоты расходами по выплате процентов можно пренебречь.)

9. Предположим, что компания имеет возможность инвестировать
а)до 55 млн. сом.
б) до 90 млн. сом.
При этом цена источников финансирования, составляет 10%.
Если имеются следующие альтернативные проекты:
Проект A: -30, 6, 11, 13, 12.
Проект B: -20, 4, 8, 12, 5.
Проект C: -40, 12, 15, 15, 15,
Проект D: -15, 4, 5, 6, 6
То необходимо рассчитывать приведенный эффект (NPV) индекс рентабельности для каждого проекта (PI) и внутреннюю норму доходности (IRR).

10. Инвестиционные проекты А и Б характеризуются следующим распределением потоков платежей (расходов и доходов в конце каждого года) и они указаны в следующей таблице

Проект	Год						
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
А	-100	-150	50	100	100	150	150
Б	-200	-50	50	50	100	200	200
В	-250	-125	40	50	100	250	250

Ставка сравнения составляет 10%.
Найти значение:

- Чистой текущей стоимости;
- Внутренней ставки доходности;
- Рентабельности;
- Срока окупаемости;
- Обосновать

11. Проект требующий 10 млн. сом начальных инвестиции, приносит прибыль 14 млн. сом через 2 года. Годовая банковская процентная ставка равна 10%.

Определить:

- Текущую ценность проекта;
- Внутреннюю норму прибыли.

12. Инвестиционные проекты А и Б характеризуются следующими потоками платежей:

Инвестиционный проект	Денежные потоки за период						
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
А	-100	-150	50	150	200	300	
Б	-200	-50	50	100	100	200	200

Требуется оценить целесообразность выбора одного из них в зависимости от принятого измерителя эффективности и при условии, что ставка сравнения принята на уровне 10%.

13. Последовательность платежей по инвестиционному проекту отражено в следующей таблице:

Год	0-й	1-й	2-й	3-й	4-й
платежи	-1000	-200	300	700	500

Если внутренняя норма прибыли альтернативных проектов равна 15%, то определить:

- Чистую текущую стоимость;
- Внутреннюю норму доходности данного проекта.

14. Пусть дана проект со следующим потоком денежных средств:

Год	0-й	1-й	2-й	3-й
Денежный поток	-150	250	300	-120

Определить критерий модифицированной внутренней нормы доходности, если альтернативные издержки равны 12%.

15. Некоторая фирма А планирует производства растительное масло по новой технологии. Для реализации проекта, необходимо потратить в начальный момент 250 000 сом, на организацию производства и на рекламную компанию через год еще 250 000 сом. Во 2-ой, 3-ий и 4-ый годы реализации нового качества растительного масла принесет доход в размерах соответственно: 250, 350, 550 тыс. сом. Вычислить внутреннюю норму доходности.

16. Найдите среднюю норму прибыли на инвестиции и срок окупаемости из упражнения 15, если инфляция составляет 7% в год.

17. Рассчитать внутреннюю ставку доходности по проекту, где затраты составляют 2 млн. сома, а доходы: 100, 250, 550, 700, 850 тыс. сома.

18. Уточнить величину ставки примера №17.

19. В банке может быть размещено 2 млн. сом под 12% годовых по сложной процентной ставке. Предлагается эти деньги инвестировать в проект с условием их удвоения через пять лет. Следует ли принять это предложение

ГЛАВА VI. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИНАНСОВОГО РЫНКА

Финансовый рынок – это рынок, на котором служат деньги, банковские кредиты и ценные бумаги. К ценным бумагам относят:

- Облигации;
- Акции;
- Фьючерсы;
- Опционы.

Финансовый рынок разделяется на денежный, кредитный и фондовый рынки. Кредитные и фондовые рынки образуют рынок капитала.

6.1. Финансовые операции

Простейшим видом финансовой операции (сделки) является предоставление в долг. Кредитор предоставляет в долг некоторые суммы $S(0)$ с условием, что через время T (измеряемая в годах) будет возвращена сумма $S(_T)$.

В результате этой операции кредитор (заимодавец) получит прибыль $S(_T)$- $S(0)$, а в расчете на ед. кредита

$$r(T)=\frac{S(T)-S(0)}{S(0)} \tag{6.1.1}$$

где $r(T)$ – называется эффективностью операции (с точки зрения кредитора), процентной ставкой, ставкой процента или просто интересом, ростом (ведь деньги отданы в рост).

Другим видом показателя эффективности операции является дисконт.

Дисконт – это и есть отношение прибыли к возвращенной сумме:

$$d_T=\frac{S(T)-S(0)}{S(0)} \tag{6.1.2}$$

где $r(T)$ и d_T– измеряются в процентах.

Они связаны в следующих соотношениях:

$$r(T) = \frac{d_{(T)}}{1 - d_{(T)}}; \qquad d_{(T)} = \frac{r(T)}{1 + r(T)} \qquad (6.1.3)$$

$S(_T)$ и $S(0)$ взаимосвязаны следующими соотношениями:

$$S(T) = S(0)(1 + r(T)) \qquad (6.1.4)$$

$$S(0) = S(T)(1 - d_{(T)}) \qquad (6.1.5)$$

Обозначим ставку процента (рост, интерес) и дисконт за год, соответственно через r и d, тогда r_T и d_T осуществляется по схеме простых и сложных процентов.

Расчет по простым процентам определяется формулой

$$r_T = T \cdot r \qquad (6.1.6)$$

При расчете по долгосрочным кредитам на целое число лет применяется схема сложных процентов: через T лет определим r_T формулой

$$r_T = (1 + r)^T - 1 \qquad (6.1.7)$$

При расчетах за неполное число лет r_T определяется формулой:

$$r_T = (1 + r)^{[T]}(1 + r\{T\} \qquad (6.1.8)$$

где [T] – целая часть T, {T} – дробная часть T, так как $T=[T]+\{T\}$.

Пример 1: Ахмедов А. поместил в банк 150 тыс. сом. Ежемесячно на эту сумму выплачивается 1,2%. В конце месяца клиент хотел получать по 3 тыс. сом.

Сколько месяцев ему придется ждать?

Решение:

По условию задачи норма процента за месяц: $r=0.012$, следовательно, T измеряется в месяцах.

Согласно условию задачи необходимо определить такое T, при котором

$$[150(1+r)^T]\cdot r=3$$

Отсюда

$$[150\cdot(1+0{,}012)^T]\cdot 0{,}012=3$$

или

$$1{,}012^T=1{,}6667$$

или

$$T\ln 1{,}012=\ln 1{,}6667$$

Отсюда $T=\dfrac{\ln 1{,}6667}{\ln 1{,}1012}=\dfrac{0{,}623692}{0{,}011928}=52{,}288$

Т.е. клиенту придется ждать 52 месяца. За это время сума его вклада достигнет 167 тыс. сом и доход с этой суммы при месячной норме 1,2% составит искомых 3 тыс. сом.

Дисконт-фактор определяется формулой:

$$V_T=\frac{1}{1+r_T}=1-d_T \qquad (6.1.9)$$

При расчете со сложным процентом за целое число лет T, дисконт-фактор представляется формулой:

$$V_T=\frac{1}{(1+r)^T}=(1-d)^T=V^T \qquad (6.1.10)$$

где V – годичный дисконт-фактор.

Эффективной ставкой называется годичная ставка сложных процентов, которая обеспечивает заданное соотношение между возвращаемой суммой $S(T)$ и кредитом $S(0)$

$$(1+r_{эф})^{T} = \frac{S(T)}{S(0)} \qquad (6.1.11)$$

Отсюда

$$r_{эф} = \left[\frac{S(T)}{S(0)}\right]^{\frac{1}{T}} - 1 \qquad (6.1.12)$$

Более сложный случай финансовой операции рассматривается как поток платежей.

Распределенной операции может быть измерен путь приведения всех платежей к начальному моменту времени. Эта величина называется чистой приведенной величиной NPV и она определяется величиной

$$NPV = \sum_{k=1}^{N} S_k V_{Tk} = \sum_{k=1}^{N} S_k \frac{1}{(1+r)^{t_k}} \qquad (6.1.13)$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_N$ – моменты платежей $S_1 \ldots S_N$

V_{tk} – дисконт-фактор в момент t_k. При этом $t_1=0$, принимают за начало отчета.

Пример 2: Контракт между малым и средним предприятием и банком предусматривает, что банк предоставляет кредит в течение 3-х лет ежегодными платежами 1 млн. сом в начале каждого года при ставке 10% годовых. МСП возвращает долг: в конце третьего года – 1 млн. сом, четвертого года 2 млн. сом, пятого – 1 млн. сом.

Приемлема ли эта операция для банка?

Решение:

Воспользуемся формулой (6.1.13)

$$NPV = \sum_{k=1}^{N} S_k V_{Tk} = \sum_{k=1}^{N} S_k \frac{1}{(1+r)^{t_k}}$$

где $t_1=0,\ t_2=1,\ t_3=2,\ t_4=3,\ t_5=4,\ t_6=5$

Тогда

$$NPV=-1-\frac{1}{1+0{,}1}-\frac{1}{(1+0{,}1)^2}+\frac{1}{(1+0{,}1)^3}+\frac{2}{(1+0{,}1)^4}+\frac{1}{(1+0{,}1)^5}=0{,}003\ \text{млн.сом}>0\ ,$$

т.е. эта операция приемлема для банка.

С помощью формулы (6.1.11) можем осуществлять сравнение различных финансовых операций, которое обеспечивает минимальные из приемлемых значений $NPV=0$, т.е. является корнем уравнения:

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{S_k}{(1+r)^{t_k}}=0,\quad t_1=0 \qquad (6.1.14)$$

в частности для простейшей финансовой операции

$$-S(0)+\frac{S(T)}{\left(1+r_{эф}\right)^T}=0$$

Отсюда

$$r_{эф}=\left[\frac{S(T)}{S(0)}\right]^{\frac{1}{T}}-1$$

т.е. последняя формула совпадает с формулой (6.1.11).

Силу роста или силу интереса обозначим через $\delta(t)$.

Если известна накопленная сумма $S(t)$, то силу роста можно определить формулой

$$\delta=\frac{d}{dt}\left[\ln S(t)\right] \qquad (6.1.15)$$

Если задано $\delta(t)$, то накопленную сумму $S(t)$ можно определить формулой

$$S(T)=S(0)e^{\int_0^T\delta(t)dt} \qquad (6.1.16)$$

Если рост r_T вычисляется по формулам сложных процентов с годовой ставкой r, то

$$\delta=\frac{1}{T}\ln(1+r)^T$$

или

$$\delta = \ln(1+r) \qquad \textit{при малых значениях } r : \delta \approx r .$$

6.2. Оптимизация финансовых вычислений и оценка курса ценных бумаг на фондовом рынке

Специалистам, работающим на фондовом рынке, постоянно приходится оценивать параметры, характеризующие операции с ценными бумагами. При проведении численного анализа необходимо понимание того, как получается конечный результат, поскольку только в этом случае можно квалифицированно принимать решения по осуществлению той или иной финансовой операции, и только в этом случае можно понять пределы применимости полученных оценок.

Наиболее существенным параметром, знание, которого необходимо при анализе операции с фондовыми ценностями, является его доходность.

Доходность вычисляется по формуле

$$d = \frac{Д}{Z} \cdot \tau \cdot 100 \qquad (6.2.1)$$

где d - доходность операции, измеряется в %

Д - доход, полученный владельцем финансового инструмента ;

Z - затраты на его приобретение;

τ - коэффициент, пересчитывающий доходность на заданный интервал времени.

Коэффициент τ имеет вид:

$$\tau = \frac{\Delta T}{\Delta t} \qquad (6.2.2)$$

где ΔT - интервал времени, на который пересчитывается доходность.

Δt - интервал времени, за который был получен доход D.

В качестве иллюстрации расчета доходности финансового инструмента рассмотрим следующий модельный случай. Осуществив операцию куплю продажу с финансовым инструментом, брокер получил за 9 дней доход, равный Д=100000 сом, причем рыночная стоимость данного финансового инструмента Z=10000000 сом. Доходность данной операции в пересчете на год:

$$d = \frac{Д}{Z}\tau \cdot 100 = \frac{Д}{Z}\frac{\Delta T}{\Delta t} \cdot 100 = \frac{100000}{10000000} \cdot \frac{360}{9} \cdot 100 = 40\%$$

Следующим важным показателем, используемый при расчете эффективности операции с ценными бумагами, является доход, полученный при этих операциях. Он вычисляется по формуле;

$$Д = \Delta d + \Delta\delta \qquad (6.2.3)$$

где Δd - дисконтная часть дохода,

$\Delta\delta$ - процентная часть дохода.

Дисконтная часть дохода определяется формулой

$$\Delta d = P_{пр} - P_{пок} \qquad (6.2.4)$$

где $P_{пр}$ - цена продажи финансового инструмента, с которым осуществляется операция;

$P_{пок}$ - цена приобретенного финансового инструмента (отметим что в выражении для доходности $P_{пок} = Z$)

Процентный доход в случае схемы простого начисления процентов определяется формулой:

$$\Delta\delta = X_n - X_0 = nX_0(1 + \alpha n) = X_0 \alpha n \qquad (6.2.5)$$

где X_n - сумма, образующаяся у инвестора через n процентных выплат;

X_0 - первоначальные инвестиции в рассматриваемый финансовый инструмент;

α - величина процентной ставки;

n - число процентных выплат.

В случае сложной процентной ставки $\Delta\delta$ определяется следующим образом:

Инвестиции в размере X_0 сом после первой процентной выплаты дадут сумму равную $X_n = X_0(1+\alpha)$

Продолжая этот процесс, после n-й процентной выплаты у инвестора будет сумма, равная

$$X_n = X_0(1+\alpha)^n \qquad (6.2.6)$$

Поэтому процентный доход в случае начисления процентов по схеме сложного процента будет равен:

$$\Delta\delta = X'n - X_0 = X_0[(1+\alpha n)^n - 1] \qquad (6.2.6)$$

Пример1: Депозитный сертификат был куплен за 6 месяцев до срока его погашения по цене 10400 сомов. Определите (по простой процентной ставке без учета налогов) доходность этой операции в пересчете на год.

Решение:

Возьмем формулу $d = \frac{Д}{Z} \cdot \tau \cdot 100$

Здесь известно Z=10000 сом.

Определим

$$\tau = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{12}{6-2} = \frac{12}{4} = 3 \qquad (6.2.8)$$

Данное уравнение также не может быть использовано для решения поставленной задачи.

Из формулы $Д = \Delta d + \Delta\delta$, учитывая, что $\Delta\delta = 0$, получаем выражение

$$Д = 3 \cdot \frac{\Delta d}{100} \qquad (6.2.9)$$

Используя формулы $\Delta d = P_{пр} - P_{пок}$ учитывая, что $P_{пр} = 10400$ и $P_{пок} = 10000$, определим $\Delta d = 400$.

Тогда $d = \frac{3}{100} \cdot 400 = 12\%$

Рынок, где товары являются ценными бумагами, называется рынок ценных бумаг. Этот рынок включает в себе первичный рынок, где происходит первичное размещение эмитированных ценных бумаг, и вторичный рынок, где происходит их обращение.

6.3. Облигация

Облигация - это такая ценная бумага, удостоверяющая отношение займа ее владения (кредитора) по отношению к эмитенту (заемщику) и дающая ему право получение фиксированных доходов в счет погашения предоставленного эмитенту заема. Облигация имеет номинальную стоимость, или номинал и, который присваивают облигации в момент ее эмиссии. Часто облигация имеет купон, который характеризуется купонной ставкой q, что дает владельцу купонный доход, равный далее q от наминала.

В зависимости от принятой эмитентом схем поглощения различают следующие виды облигаций:

«Вечная облигация» – свидетельство бессрочного займа; по ним производится только выплата процентов (купонных доходов), капитал не возвращается, точнее, эмитент указывает на возможность их выкупа, не связывая себе конкретным сроком. К ним условно можно отнести купонные облигации с настолько отдаленным сроком, что можно пренебречь текущей стоимостью их номинала.

Бескупонная облигация с погашением по номиналу (приобретается с дисконтом).

Облигации с периодической выплатой купонных доходов, погашаемые в конце срока.

Для расчета стоимости облигации и их оценки курсовой облигации используем формулу:

$$P = \frac{Y_1}{1+i} + \frac{Y_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{Y_n}{(1+i)^n} \qquad (6.3.1)$$

где $Y_к$ ($к=1,2,\ldots n$) - доходы,

i - ставка сравнения.

Рассмотрим вопросы оценки облигации. Пусть облигация имеет номинальную N и курсовую P стоимости. Согласно положению о фондовых биржах, курс облигации указывается в процентах к ее номинальной стоимости:

$$K_{\%} = \frac{K_y}{N} \cdot 100\% \qquad (6.3.2)$$

где K_y - курсовая цена,

N - номинал.

Для «вечной облигации» поток доходов образует бесконечную постоянную ренту с купонном платежом и она определяется формулой

$$Y = \eta \cdot N \qquad (6.3.3)$$

где n - купонная ставка

N - номинал

За оценку ее курсовой стоимости принимается совершенная величина этого потока

$$K_c = \frac{\eta}{i} \cdot N \qquad (6.3.4)$$

где i – ставка сравнения,

η – купонная ставка,

N – номинал.

Или в процентах

$$K_{\%} = \frac{\eta}{i} \cdot 100\% \qquad (6.3.5)$$

Бескупонная облигация с погашением по номиналу

Полагая, что $Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_{n-1} = Y_n = N$ получим оценку курсовой стоимости. В этом случае придем к следующему потоку доходов:

$$Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_{n-1} = Y_n = \eta N, \qquad Y_n = \eta N + N$$

Подставляя эти значения в (3.2.10), получим следующую оценку:

$$P = \eta N\left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}\right) + \frac{N}{(1+i)^n} =$$

$$= K + \eta N\left(\frac{1}{1+i}\right) = K + \frac{\eta}{i}\left(N - \frac{N}{(1+i)^n}\right) = K + \frac{\eta}{i}(N - K) \qquad (6.3.6)$$

где i – ставка сравнения.

Эта формула связывает текущую цену P с современной величиной финальной выплаты N и четко выделяет роль купонного процента η. В честном случае купонной ставки, равной ставке сравнения ($\eta = i$), курсовая стоимость (6.3.6) совпадает с номинальной ценой ($P = N$).

Если покупка производится в промежутке между купонными платежами, то при оценке курса следует учесть ту часть дохода, которая причитается продавцу за его долю купонного периода.

Пример 1: Определить ориентированную рыночную стоимость и оценку курса для корпоративной облигации номиналом 1000 сом при условии, что срок погашения через 3 года, купонная ставка и ставка банковского процента соответственно 10 и 4 процентов годовых.

Решение:

Для оценки курса облигации по данным рассматриваемой задачи, воспользуемся формулой (6.3.1)

$$P = \frac{100}{1{,}04} + \frac{100}{(1{,}04)^2} + \frac{100}{(1{,}04)^3} + \frac{1000}{(1{,}04)^3} \approx 1166{,}5$$

Тот же результат можно найти, исходя из соотношения (6.3.6), в котором:

$$K = \frac{1000}{(1{,}04)^3} = 888{,}996; \qquad \frac{\eta}{i} = \frac{0{,}1}{0{,}04} = 2{,}5; \qquad N = 1000$$

$$P = K + \frac{\eta}{i} \cdot (N - K) = 888{,}996 + 2{,}5 \cdot (1000 - 888{,}996) \approx 1166{,}5$$

Переходя к процентам от номинала, получим оценку курса:

$$P(\%) \approx 116{,}65\%$$

Теперь рассмотрим задачи о сравнение ценных бумаг по доходности вложения.

Пример 2: Пусть одновременно эмитированы облигации государственного займа для юридических лиц и депозитные сертификаты крупного, устойчиво работающего коммерческого банка. Условия выпуска облигации следующие: период 3 года, номинал 1000 сом, дисконт при эмиссии - 15%, годовой доход - 10%. Условия выпуска депозитных сертификатов: период обращения- 3 года, номинал - 1000 сом, начисление производится по простой ставке с годовым доходом - 22%.

По государственным облигациям доход налогом не облагается, по депозитным сертификатом доход облагается налогом по ставке 15%. Выяснить, что выгодно для инвестора: облигация или депозитный сертификат?

Решение:

По государственным облигациям доход (налог не облагается) составит:

$$3 \cdot 1000 \cdot 0{,}1 + 1000 \cdot 0{,}15 = 300 + 150 = 450$$

Доходность по государственным облигациям равна:

$$\frac{\frac{450}{3}}{850} = \frac{150}{850} \approx 0{,}176 = 17{,}6\%$$

А по депозитным сертификатам с учетом налогообложения (15%)

$$(1000 \cdot 0{,}22 \cdot 3) \cdot 0{,}85 = 561$$

Доходность депозитных сертификатов составит:

$$\frac{\frac{561}{3}}{1000} = \frac{187}{1000} = 0{,}187 = 18{,}7\%$$

Отсюда понятно, что для инвестора выгоднее приобрести сертификат.

6.4. Оценка курса акции и определение доходности облигации

Рассмотри несколько примеров по оценке курса акции.

Пример 1: Пусть балансовая прибыль акционерного общества с уставным фондом 2 млн. сом, полученная исключительно от производительной деятельности, составила 10 млн. сом. Общее собрание акционеров решило, что оставшаяся после уплаты налогов прибыль распределится следующим образом: 20% - на развитие производства; 80% - на выплату дивидендов. Какой должен быть (ориентировочно) курс акции данного 10, если банковский процент составляет 16%; номинал акции – 100 сом, а ставка налога на прибыль - 24%.

Решение:

Определим количество акции $n = \frac{2000000}{100} = 20000\ шт.$

Но прибыль после уплаты налогов определяется в виде:

$$П = (1 - 0{,}24) \cdot 10^7 = 0{,}76 \cdot 10^7 = 7{,}6\ млн.\ сом$$

Тогда на выплату акционеров пойдет сумма:

$$Д=0,8\cdot 7600000=6080000 \text{ сом}$$

Выплата дивидендов на одну акцию:

$$d=\frac{6080000}{20000}=304 \text{ сом}$$

Текущая доходность определяется формулой:

$$i_t=\frac{gN}{P}=\frac{g}{K}\cdot 100 \qquad (6.4.1)$$

где g - объявленная норма годового дохода (купонная ставка процента),

K - курс облигации,

P - рыночная цена,

N - номинальная облигация.

Доход по купонам является единственным источником текущих поступлений от данного вида облигации, то полная доходность у рассматриваемых облигаций равна текущей в случае, когда выплаты по купонам ежегодны, т.е $i=i_t$. Если же проценты выплачиваются раз в году, каждый раз по норме $g/_{P}$, то текущая доходность определяется по формуле

$$i=(1+\frac{g}{P}\cdot\frac{100}{K})^{P}-1=(1+\frac{i_P}{p})^{P}-1 \qquad (6.4.2)$$

Пример 2: Вечная рента приносящая 8,7% дохода, куплена по курсу 135. Какова финансовая эффективность инвестиции при условии, что проценты выплачиваются раз в году, поквартально (P=4)?

Решение:

По условию K=135, g=0,087

Тогда $$i=i_t=\frac{0,087}{135}\cdot 100=0,06$$

$$i = \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{1} - 1 = 0.015$$

Рассмотрим вид облигации без выплаты процентов. Такая облигация обеспечивает владельцу в качестве дохода разность между номиналом и ценой приобретения. Курс такой облигации всегда меньше 100.

Полная доходность (или ставка перемещения) определяется формулой

$$i = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{K}{100}}} - 1 \qquad (6.4.3)$$

где n - срок до выкупа облигации; а K – курс облигации.

Пример 3: Некоторая корпорация выпустила облигации с нулевым купонном с погашением через 5 лет. Курс реализации 70.

Определить полную доходность облигации.

Решение:

$$i = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{70}{100}}} - 1 = \sqrt[5]{\frac{100}{70}} - 1 = \sqrt[5]{1 + \frac{3}{7}} - 1 \approx \sqrt[5]{1 + 0,429} - 1 \approx 1 + \frac{1}{5} \cdot 0,429 + \frac{\frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{5} - 1)}{2} \cdot$$

$$\cdot (0,429)^2 + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5} - 1)(\frac{1}{5} - 2)}{3} \cdot (0,429)^2 = 1 + 0,0858 - 0,0147 + 0,00379 - 0,00114 - 1 = 0,07375$$

т.е. облигация обеспечивает инвеститору 7,375% годового дохода.

Приравнивая современную стоимость дохода цене облигации найдем полную доходность с помощью формулы;

$$i = \frac{1 + g}{\sqrt[n]{\frac{K}{100}}} - 1 \qquad (6.4.4)$$

Пример 4: Облигация приносящая 5% годовых относительно номинала, куплена по курсу 75, срок погашения 5 лет. Если номинал и проценты выплачиваются в конце срока, то определить доходность инвестора.

Решение:

Применяя формулу (6.4.4) определим полную доходность i:

$$i = \frac{1,05}{\sqrt[5]{0,75}} - 1 \qquad (6.4.5)$$

Вычислим $\sqrt[5]{0,75}$:

$$\sqrt[5]{0,75} = \sqrt[5]{1-0,25} = 1 - \frac{1}{5}\cdot 0,25 + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)}{2}(0,25)^2 + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)(\frac{1}{5}-2)}{3}(-0,25)^3 +$$

$$+\frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)(\frac{1}{5}-2)(\frac{1}{5}-3)}{4}(-0,25)^4 + ... = 1 - 0,05 - \frac{2}{25}0,0625 - 0,00075 = 1 - 0,05 - 0,005 -$$

$$-0,00075 = 0,94425$$

Тогда, доходность инвестора $i = \dfrac{1,05}{0,94425} - 1 = 0,112$ *или* $11,2\%$.

Иногда для оценки полной доходности применяется метод приближенной оценки.

Оценка осуществляется с помощью формулы:

$$i = \frac{g + \dfrac{(1 - \frac{K}{100})}{n}}{\dfrac{(1 + \frac{K}{100})}{2}} \qquad (6.4.6)$$

Пример 5: Облигация со сроком 5 лет, проценты по которой выплачиваются раз в году по норме 8%, куплена по курсу 7%.

Определить полную доходность облигации.

Решение:

По формуле (6.4.6) определим приближение решения поставленной задачи

$$i = \frac{8 + (100 - 75)/5}{(100 + 75)/2} = \frac{3}{87,5} \approx 0,14857$$

т.е. 14,86%.

Для определения ориентировочного курса акции воспользуемся формулой.

$$p = \frac{d}{\delta\%}$$

где $\delta\%$ - банковский процент и он равен в данном случае δ=16%=0,16.

Тогда $p = \frac{304}{0,16} = 1900$ *сом.*

Теперь рассмотрим следующую задачу:

Пример 6: Инвестор приобрел акцию в начале текущего финансового года за 1000 сом и продает ее через 4 месяца.

Определите примерную стоимость, по которой совершается продажа, если ожидаемая прибыль в расчете в акцию по итогам года составляет 120 сом. Ситуация на финансовом рынке и положении компании с начала года существенно изменилось.

Решение:

Продавец акции заинтересован в том, чтобы оправдать вложенный капитал и получить полагающийся ему за 4 месяца дивиденд.

Следовательно примерная стоимость акции:

$$P=1000+ P = 1000 + \left(\frac{120}{12}\right) \cdot 4 = 1040 \text{ сом}$$

Рассмотрим теперь задачу о внутренней доходности «вечной» облигации:

Пример 7: «Вечная» облигация, приносящая 4,5% фиксированного дохода, куплена по курсу 90%. Какова эффективность вложения (сложная ставка годового процента), если купонные выплаты по облигации производятся поквартально?

Решение:

Определим поквартальную внутреннюю доходность j бесконечного потока периодических купонных выплат по ставке 456 сом первоначальной разовой инвестицией 90% от наминала.

Приравнивая текущую стоимость потока доходов к величине вклада, получим следующее уравнение:

$$\frac{\frac{4{,}5\%}{4}}{j} = 90\%, \quad \text{отсюда следует, что} \quad j = \frac{\frac{4{,}5\%}{4}}{90\%} = 0{,}0125$$

Переходя от поквартального к сложному годовому проценту, найдем эффективность вложения:

$$Ч_{эф} = (1 + 0{,}0125)^4 - 1 = 0{,}0509 = 5{,}09\%$$

6.5. Задачи определения доходности облигации

Пусть известна рыночная цена облигации P. Составим уравнение:

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{Nq}{(1+i)^t} + \frac{N}{(1+i)^n} = Nq * PVIFA_{i,n} + N * PVIF_{i,n} \tag{6.5.1}$$

Для определения доходность облигации i решим уравнение (6.5.1) относительно i. Для решения этого уравнения применим приближенные методы решения уравнений. Первые приближенные для i выберем по следующей формуле;

$$i \approx \frac{qN + \frac{N - Pk}{n}}{\frac{Pk + N}{2}} \tag{6.5.2}$$

Если при этом значении i оценка облигации оказалось выше, чем рыночной облигации то ставку i необходимо повышать, а если ниже, то понижать. Это можно осуществить с помощью формулы линейной интерполяции.

$$i = i' + \frac{P_i - P_1}{p' - p''} \cdot (i'' + i') \tag{6.5.3}$$

Пример 1: По облигации номинальной стоимостью в 100 сом в течение 5 лет (срок до ее погашения) будут выплачиваться ежегодно процентные платежи в сумме 10 сом. Рыночная цена облигации - 10 сом. Найти доходность облигации.

Решение:

Найдем первое приближение:

$$i \approx \frac{10 + \frac{110}{5}}{\frac{110+100}{2}} = \frac{10-2}{105} = \frac{8}{105} = 0{,}0761904 \approx 7{,}6\%$$

Оценим облигации по ставке 7,6%

$$P^{`} = 10 \cdot PVIFA_{7,6\%,5} + 100 \cdot PVIF_{7,6\%,5} = 10\frac{1-1{,}076^{-5}}{0{,}76} + 100\frac{1}{(1{,}76)^5} = 10\frac{1-\frac{1}{1{,}442319}}{0{,}076} +$$

$$+\frac{100}{1{,}442319} = \frac{10\cdot(1-0{,}6933279)}{0{,}076} + 69{,}3328 = \frac{3{,}0667}{0{,}076} + 69{,}3328 =$$

$$= 40{,}351315 + 69{,}3328 = 109{,}6844\, сом$$

Отсюда видно, что оценка облигации оказалась ниже рыночной, необходимо снизить ставку. Возьмем i=7,5%. Оценим облигацию по этой ставке:

P``=10*PVIFA

$$P^{`} = 10 \cdot PVIFA_{7,6\%,5} + 100 \cdot PVIF_{7,5\%,5} = 10\cdot\frac{1-(1{,}075)^{-5}}{0{,}075} + \frac{100}{(1{,}075)^5} = 10\cdot\frac{1-0{,}6965601}{0{,}075} + 69{,}6560 =$$

$$= 10\cdot\frac{0{,}3034399}{0{,}075} + 69{,}6560 = 40{,}4586 + 69{,}6560 = 110{,}1146\, сом \qquad (6.5.4)$$

Тогда пользуясь формулой линейной интерполяции (6.5.4) имеем:

$$i = 7{,}6 + \frac{109{,}6844-110}{109{,}6844-110{,}1146}\cdot(7{,}5-7{,}6) = 7{,}6 + \frac{-0{,}3156}{-0{,}4302}\cdot(-0.1) = 7{,}6 - 0.0773612 =$$

$$= 7{,}5266388 \approx 7{,}53\%$$

Таким образом, доходность облигации будет 7,53%.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Облигация номиналом 150 тыс. сом с купонной ставкой 5% и сроком на 5 лет продавалась с дисконтом 12%.
   Определить полную доходность этой облигации. Задачу решить двумя способами:
   - опираясь на понятие среднегодового дохода.
   - используя аналогию с инвестиционными проектами.
2. Определить ориентировочную рыночную стоимость и оценку курса для корпоративной облигации номиналом 1500 сом при условии, что срок погашения через 5 лет, купонная ставка банковского процента -10% и 4% годовых.
3. Оценить текущую стоимость облигации с нулевым купоном номинальной стоимостью 1.5 млн. сом и сроком погашения 5 лет. Ставка дисконта r=10%/
4. Определить текущую стоимость облигации номинальной стоимостью 1.5 млн. сом, с купонной ставкой 14% годовых и сроком погашения 5 лет. Ставка дисконта r=12%.
5. Облигация со сроком 5 лет, проценты по которой выплачиваются раз в году по норме 12%, куплена по курсу 65. определить текущая доходность по облигации и её полная доходность.
6. Облигация, приносящая 12% годовых относительно номинал, куплена по курсу 85, срок для погашения 4 года. Номинал и проценты выплачиваются в конце срока. Определить полную доходность инвестора.
7. Корпорация А выпустила облигации с нулевым купоном с погашением через 7 лет. Курс реализации 55. Определить доходность облигации.
8. Определить финансовая эффективность инвестиций. Если вечная рента приносит 8.5% дохода, куплена по курсу 85 проценты выплачивается раз в году, по квартально (p=4)?
9. «Вечная» облигация, приносящая 4.5% фиксированного годового дохода, куплена по курсу 90%. Какова эффективность вложения (сложная ставка годового процента), если купонные выплаты по облигации производятся поквартально?
10. Определите цену акции нулевого роста при условии, что дивиденды в размере 800 сом из года в год будут оставаться неизменными, а требуемый уровень доходности -10%.

11. Трехгодичная купонная облигация номиналом 100 долларов и с купонной ставкой 6% имеет текущую стоимость 92.6 доллара. Ставки налогов на прирост капитала и процентной доход одинаковы и равны 30% . Требуется:
   а) определить полную годовую доходность этой облигации;
   б) найти реальное значение этой доходности, если ожидается инфляции с годовым темпом 4%.
   в) рассчитать внутреннюю доходность;
   г) определить ее реальное значение при инфляции с тем же темпом 4%.
12. Инвестор А приобрел за 1000 сом привилегированную акцию номинальной стоимостью 1250 сом фиксированным размером дивидендов 22% годовых. В настоящее время курсовая стоимость акции -1600 сом. Определить:
   а) текущую доходность по данной акции (без учета налогов);
   б) текущую доходность вложения инвестора А.
13. До погашения облигаций одной из компаний осталось четыре года. Номинальная стоимость облигаций – 1500 сом процент на купоне -10%, деньги выплачиваются ежегодно. Определите действительную процентную ставку для стоимости облигаций, равной 1238 сом (первый вариант) и 1660 сом (второй вариант). При этом считается, что процентная ставка банка в течение 4 лет не изменится.
14. Фирма выпустила облигации по 1000 сом сроком на 5 лет и присвоила купону 20%. Требуется рассчитать через четыре года. Процентная ставка банка прогнозируется равной 15%.
15. Курс облигации номинальной стоимостью 1000 сом и 20 %-ым купоном со сроком погашения 10 лет равен по прошествии 8 лет после выпуска 85%. Требуется определить процентную ставку банка.
16. Фирма выпустила облигацию по 1000 сом. Сроком 10 лет и присвоила купону 20%. Процентная ставка банка прогнозируется равной 15%. Надо вычислить ожидаемую стоимость и курс облигации через 5 лет.
17. Курс облигации номинальной стоимостью 1000 сом и 20%-ным купоном со сроком погашения 10 лет равен по прошествии 6 лет после выпуска 85%. Какова процентная ставка банка?
18. До погашения облигаций одной из компаний осталось 5 лет. Номинальная стоимость облигаций – 1000 сом, процент на

купону – 10%, деньги выплачивается ежегодно. Определите действительную процентную ставку для стоимости облигаций, равной 850 сом (вариант 1) и 1100 сом (вариант 2). При этом будем считать, что процентная ставка банка в течение 5 лет не изменяется.

19. АО в 2007 году выпустило обыкновенные акции в количестве 150 тыс. штук номинальной стоимостью 100 сом каждая. Инвестор «А» приобрел в 2007 году пакет акций, состоящий из 100 штук, по цене 200 сом за акцию. Рыночная стоимость одной акции в настоящее время – 350 сом. Определить:
   а) текущую доходность пакета акций инвестора «А» (без учета налогов) если ежегодной дивиденд по акции выплачивается в размере 90 сом на одну акцию;
   б) Какова текущая доходность точно такого же пакета акций для его потенциального покупателя В.
20. Инвестор А приобрел за 3750 сом привилегированную акцию номинальной стоимостью 3000 сом с фиксированным размером дивиденда 15% годовых. Через 5 лет (в течение которых дивиденды регулярно выплачивались) акция была им продана за 3150 сом. Определить конечную (среднегодовую) доходность данной акции.
21. Инвестор купил в начале года 150 акций компании А по цене 150 сом каждая. В течение года он получил 45 сом дивидендов на каждую акцию. Найти текущий, капитальный и полный доходы и соответствующие годовые доходности, если к концу года цены за акцию выросла до 225 сом.
22. В начале года господин N обладал четырьмя видами ценных бумаг в следующих количествах и со следующими текущими и ожидаемыми к концу года ценами:

Ценные бумаги	**Количество акций**	**Текущая цена, (долл.)**	**Ожидаемая цена к концу года (долл.)**
A	100	50	50
B	200	35	40
C	50	25	50
D	100	100	110

Какова ожидаемая доходность этого портфеля за год?

23. Оценить текущую стоимость бессрочной облигации, если по ней ежегодно выплачивается доход в размере 150 000 сом. Ставку дисконта равно r=10%.

Значения множителя $(1+0,01\cdot i_c)^n$ в функции параметров i_c и n

n	i_c							
	5	**10**	**15**	**20**	**24**	**28**	**32**	**36**
1	1,0500	1,1000	1,1500	1,2000	1,2400	1,2800	1,3200	1,3600
2	1,1025	1,2100	1,3225	1,4400	1,5376	1,6384	1,7224	1,8496
3	1,1576	1,3310	1,5209	1,7280	1,9066	2,0972	1,3000	2,5155
4	1,2155	1,4641	1,7490	2,0736	2,3642	2,6844	3,0360	3,4210
5	1,2763	1,6105	2,0114	2,4883	2,9316	3,4360	4,0075	4,6526
6	1,3401	1,7716	2,3131	2,9860	3,6352	4,3980	5,2899	6,3275
7	1,4071	1,9487	2,6600	3,5832	4,5077	5,6295	6,9826	8,6054
8	1,4775	2,1432	3,0590	4,2998	5,5895	7,2058	9,2170	11,703
9	1,5513	2,3579	3,5179	5,1598	6,9310	9,2234	12,166	15,917
10	1,6289	2,5937	4,0456	6,1917	8,5944	11,806	16,060	21,647
11	1,7103	2,8531	4,6524	7,4301	10,657	15,112	21,199	29,439
12	1,7959	3,1384	5,3503	8,9161	13,215	19,343	27,983	40,037
13	1,8856	3,4523	6,1528	10,699	16,386	24,759	36,937	54,451
14	1,9799	3,7975	7,0757	12,839	20,319	31,691	48,757	74,053
15	2,0789	4,1772	8,1371	15,407	25,196	40,565	64,359	100,71

Приложение 2

Значения множителя $(1+0,01\cdot i_c)^n /(0,01\cdot i_c)$в функции параметров i_c и n

n	i_c							
	5	**10**	**15**	**20**	**24**	**28**	**32**	**36**
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	2,0500	2,1000	2,1500	2,2000	2,2400	2,2800	2,3200	2,3600
3	3,1525	3,3100	3,4725	3,6400	3,7776	3,9184	4,0624	4,2096
4	4,3101	4,6410	4,9934	5,3680	5,6842	6,0156	6,3624	6,7251
5	5,5256	6,1051	6,7424	7,4416	8,0484	8,6999	9,3983	10,146
6	6,8019	7,7156	8,7537	9,9299	10,980	12,136	13,406	14,799
7	8,1420	9,4872	11,067	12,916	14,615	16,534	18,696	21,126
8	9,5491	11,436	13,727	16,499	19,123	22,163	25,678	29,732
9	11,027	13,579	16,786	20,799	24,712	29,369	34,895	41,435
10	12,578	15,937	20,304	25,959	31,643	38,593	47,062	57,352
11	14,207	18,531	24,349	32,150	40,238	50,398	63,122	78,998
12	15,917	21,384	29,002	39,581	50,895	65,510	84,320	108,44
13	17,713	24,523	34,352	48,497	64,110	84,853	112,30	148,47
14	19,599	27,975	40,505	59,196	80,496	109,61	149,24	202,93
15	21,579	31,772	47,570	72,035	100,82	141,30	198,00	276,98

Значения множителя $1/0{,}01\cdot i_c - 1/(1+0{,}01\cdot i_c)^n/(0{,}01\cdot i_c)$ в функции параметров i_c и n

n	i_c						
	5	10	15	20	24	28	32
1	0,9524	0,9091	0,8696	0,8333	0,8065	0,7813	0,7596
2	1,8594	1,7355	1,6257	1,5278	1,4568	1,3916	1,3315
3	2,7232	2,4869	2,2832	2,1065	1,9813	1,8684	1,7663
4	3,5460	3,1699	2,8550	2,5887	2,4043	2,2410	2,0957
5	4,3295	3,7908	3,3522	2,9906	2,7457	2,5320	2,3452
6	5,0757	4,3553	3,7845	3,3255	3,0205	2,7594	2,5342
7	5,7864	4,8684	4,1504	3,6046	3,2423	2,9370	2,6775
8	6,4632	5,3349	4,4873	3,8372	3,4212	3,0758	2,7860
9	7,1078	5,7590	4,7716	4,0310	3,5655	3,1842	2,8681
10	7,7217	6,1446	5,0188	4,1925	3,6819	3,2689	2,9304
11	8,3064	6,4951	5,2337	4,3271	3,7757	3,3351	2,9776
12	8,8633	6,8137	5,4206	4,4392	3,8514	3,3868	3,0133
13	9,3936	7,1034	5,5831	4,5327	3,9124	3,4272	3,0404
14	9,8986	7,3667	5,7245	4,6106	3,9616	3,4587	3,0609
15	10,379	7,6061	5,8474	4,6755	4,0013	3,4834	3,0764

Приложение 4

Значения множителя $1/(1+0{,}01\cdot i_c)^n$ в функции параметров i_c и n

n	i_c							
	5	10	15	20	24	28	32	36
1	0,9524	0,9091	0,8696	0,8333	0,8065	0,7813	0,7576	0,7353
2	0,9070	0,8264	0,7561	0,6944	0,6504	0,6104	0,5739	0,5407
3	0,8638	0,7513	0,6575	0,5787	0,5245	0,4768	0,4348	0,3975
4	0,8227	0,6830	0,5718	0,4823	0,4230	0,3725	0,3294	0,2923
5	0,7835	0,6209	0,4972	0,4019	0,3411	0,2910	0,2495	0,2149
6	0,7462	0,5645	0,4323	0,3349	0,2751	0,2274	0,1890	0,1580
7	0,7107	0,5132	0,3759	0,2791	0,2218	0,1776	0,1432	0,1162
8	0,6768	0,4665	0,3269	0,2326	0,1789	0,1388	0,1085	0,0854
9	0,6446	0,4241	0,2843	0,1938	0,1443	0,1084	0,0822	0,0628
10	0,6139	0,3855	0,2472	0,1615	0,1164	0,0847	0,0629	0,0462
11	0,5847	0,3505	0,2149	0,1346	0,0938	0,0662	0,0472	0,0340
12	0,5568	0,3186	0,1869	0,1122	0,0757	0,0517	0,0357	0,0250
13	0,5303	0,2897	0,1625	0,0935	0,0610	0,0404	0,0271	0,0184
14	0,5051	0,2633	0,1413	0,0779	0,0492	0,0316	0,0205	0,0135
15	0,4810	0,2394	0,1229	0,0649	0,0397	0,0247	0,0155	0,0099

Порядковые номера дней в не високосном году

День	Месяц											
	январь	февраль	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	3563
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Множители наращения по сложным процентам

Число периодов	Ставка процентов за период						
	5,00%	**10,00%**	**15,00%**	**20,00%**	**25,00%**	**30,00%**	**40,00%**
1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,4
2	1,1025	1,21	1,3225	1,44	1,5625	1,69	1,96
3	1,157625	1,331	1,520875	1,728	1,953125	2,197	2,744
4	1,215506	1,4641	1,749006	2,0736	2,441406	2,8561	3,8416
5	1,276282	1,61051	2,011357	2,48832	3,051758	3,71293	5,37824
6	1,340096	1,771561	2,313061	2,985984	3,814697	4,826809	7,529536
7	1,4071	1,948717	2,66002	3,583181	4,768372	6,274852	10,54135
8	1,477455	2,143589	3,059023	4,299817	5,960464	8,157307	14,75789
9	1,551328	2,357948	3,517876	5,15978	7,450581	10,6045	20,66105
10	1,628895	2,593742	4,045558	6,191736	9,313226	13,78585	28,92547
11	1,710339	2,853117	4,652391	7,430084	11,64153	17,9216	40,49565
12	1,795856	3,138428	4,35025	8,9161	14,55192	23,29809	56,69391
13	1,885649	3,452271	6,152788	10,69932	18,18989	30,28751	79,37148
14	1,979932	3,797498	7,075706	12,83918	22,73737	39,37376	111,1201
15	2,078928	4,177248	8,137062	15,40702	28,42171	51,18589	155,5681
16	2,182875	4,594973	9,357621	18,48843	35,52714	66,54166	217,7953
17	2,292018	5,05447	10,76126	22,18611	44,40892	86,50416	304,9135
18	2,406619	5,559917	12,37545	26,62333	55,51115	112,4554	426,8789
19	2,52695	6,115909	14,23177	31,948	69,38894	146,192	597,6304
20	2,653298	6,7275	16,36654	38,3376	86,73617	190,0496	836,6826
21	2,785963	7,40025	18,82152	46,00512	108,4202	247,0645	1171,356
22	2,925261	8,140275	21,64475	55,20614	135,5253	321,1839	1639,898
23	3,071524	8,954302	24,89146	66,24737	169,4066	417,5391	2295,857
24	3,2251	9,849733	28,62518	79,49685	211,7582	542,8008	3214,2
25	3,386355	10,83471	32,91895	95,39622	264,6978	705,641	4499,88

Множители дисконтирования по сложным процентам

Число периодов	Ставка процентов за период						
	5,00%	10,00%	15,00%	20,00%	25,00%	30,00%	40,00%
1	0,952381	0,909091	0,869565	0,833333	0,8	0,769231	0,714286
2	0,907029	0,826446	0,756144	0,694444	0,64	0,591716	0,510204
3	0,863838	0,751315	0,657516	0,578704	0,512	0,455166	0,364431
4	0,822702	0,683013	0,571753	0,482253	0,4096	0,350128	0,260308
5	0,783526	0,620921	0,497177	0,401878	0,32768	0,269329	0,185934
6	0,746215	0,564474	0,432328	0,334898	0,262144	0,207176	0,13281
7	0,710681	0,513158	0,375937	0,279082	0,209715	0,159366	0,094865
8	0,676839	0,466507	0,326902	0,232568	0,167772	0,122589	0,06776
9	0,644609	0,424098	0,284262	0,193807	0,134218	0,0943	0,0484
10	0,613913	0,385543	0,247185	0,161506	0,107374	0,072538	0,034572
11	0,584679	0,350494	0,214943	0,134588	0,085899	0,055799	0,024694
12	0,556837	0,318631	0,186907	0,112157	0,068719	0,042922	0,017639
13	0,530321	0,289664	0,162528	0,093464	0,054976	0,033017	0,012599
14	0,505068	0,263331	0,141329	0,077887	0,04398	0,025398	0,008999
15	0,481017	0,239392	0,122894	0,064905	0,035184	0,019537	0,006428
16	0,458112	0,217629	0,106865	0,054088	0,028147	0,015028	0,004591
17	0,436297	0,197845	0,092926	0,045073	0,022518	0,01156	0,00328
18	0,415521	0,179859	0,080805	0,037561	0,018014	0,008892	0,002343
19	0,395734	0,163508	0,070265	0,031301	0,014412	0,006684	0,001673
20	0,376889	0,148644	0,0611	0,026084	0,011529	0,005262	0,001195
21	0,358942	0,135131	0,053131	0,021737	0,009223	0,004048	0,000854
22	0,34185	0,122846	0,046201	0,018114	0,007379	0,003113	0,00061
23	0,325571	0,111678	0,040174	0,015095	0,005903	0,002395	0,000436
24	0,310068	0,101526	0,034934	0,012579	0,004722	0,001842	0,000311
25	0,295303	0,092296	0,030378	0,010483	0,003778	0,001417	0,000222

Множители наращения аннуитета

Число периодов	Ставка процентов за период						
	5,00%	10,00%	15,00%	20,00%	25,00%	30,00%	40,00%
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2,05	2,1	2,15	2,2	2,25	2,3	2,4
3	3,1525	3,31	3,4725	3,64	3,8125	3,99	4,36
4	4,310125	4,641	4,993375	5,368	5,765625	6,187	7,104
5	5,525631	6,1051	6,742381	7,4416	8,207031	9,0431	10,9456
6	6,801913	7,71561	8,753738	9,92992	11,25879	12,75603	16,32384
7	8,142008	9,487171	11,0668	12,9159	15,07349	17,58284	23,85338
8	9,549109	11,43589	13,72682	16,49908	19,84186	23,85769	34,39473
9	11,02656	13,57948	16,78584	20,7989	25,80232	32,015	49,15262
10	12,57789	15,93742	20,30372	25,95868	33,2529	42,6195	69,81366
11	14,20679	18,53117	24,34928	32,15042	42,56613	56,40535	98,73913
12	15,91713	21,38428	29,00167	39,5805	54,20766	74,32695	139,2348
13	17,71298	24,52271	34,35192	48,4966	68,75958	97,62504	195,9287
14	19,59863	27,97498	40,50471	59,19592	86,94947	127,9125	275,3002
15	21,57856	31,77248	47,58041	72,03511	109,6868	167,2863	386,4202
16	23,65749	35,94973	55,71747	87,44213	138,1085	218,4722	541,9883
17	25,84037	40,5447	65,07509	105,9306	173,6357	285,0139	759,7837
18	28,13238	45,59917	75,83636	128,1167	218,0446	371,518	1064,697
19	30,539	51,15909	88,21181	154,74	273,5558	483,9734	1491,576
20	33,06595	57,275	102,4436	186,688	342,9447	630,1655	2089,206
21	35,71925	64,0025	118,8101	225,0256	429,6809	820,2151	2925,889
22	38,50521	71,40275	137,6316	271,0307	538,1011	1067,28	4097,245
23	41,43048	79,54302	159,2764	326,2369	673,6264	1388,464	5737,142
24	44,502	88,49733	184,1678	392,4842	843,0329	1806,003	8032,999
25	42,7271	98,34706	212,793	471,9811	1054,791	2348,803	11247,2

Дисконтные множители аннуитета

Число периодов	Ставка процентов за период						
	5,00%	**10,00%**	**15,00%**	**20,00%**	**25,00%**	**30,00%**	**40,00%**
1	0,952381	0,909091	0,869565	0,833333	0,8	0,769231	0,714286
2	1,85941	1,735537	1,625709	1,527778	1,44	1,360947	1,22449
3	2,723248	2,486852	2,283225	2,106481	1,952	1,816113	1,588921
4	3,545951	3,169865	2,854978	2,588735	2,3616	2,166241	1,849229
5	4,329477	3,790787	3,352155	2,990612	2,68928	2,43557	2,035164
6	5,075692	4,355261	3,784483	3,32551	2,951424	2,642746	2,167974
7	5,786373	4,868419	4,16042	3,604592	3,161139	2,802112	2,262839
8	6,463213	5,334926	4,487322	3,83716	3,328911	2,924702	2,330599
9	7,107822	5,759024	4,771584	4,030967	3,463129	3,019001	2,378999
10	7,721735	6,144567	5,018769	4,192472	3,570503	3,091539	2,413571
11	8,306414	6,495061	5,233712	4,32706	3,656403	3,147338	2,438265
12	8,863252	6,813692	5,420619	4,439217	3,725122	3,19026	2,455904
13	9,393573	7,103356	5,583147	4,532681	3,780098	3,223277	2,468503
14	9,898641	7,366687	5,724476	4,610567	3,824078	3,248675	2,477502
15	10,37966	7,60608	5,84737	4,675473	3,859263	3,268211	2,48393
16	10,83777	7,823709	5,954235	4,729561	3,88741	3,283239	2,488521
17	11,27407	8,021553	6,047161	4,774634	3,909928	3,2948	2,491801
18	11,68959	8,201412	6,127966	4,812195	3,927942	3,303692	2,494144
19	12,08532	8,36492	6,198231	4,843496	3,942,354	3,310532	2,495817
20	12,46221	8,513564	6,259331	4,86958	3,953883	3,315749	2,497012
21	12,82115	8,648694	6,312462	4,891316	3,963107	3,319842	2,497866
22	13,163	8,77154	6,358663	4,90943	3,970485	3,322955	2,498476
23	13,48857	8,883218	6,398837	4,924525	3,976388	3,32535	2,498911
24	13,79864	8,984744	6,433771	4,937104	3,981111	3,327192	2,499222
25	14,09394	9,07704	6,464149	4,947587	3,984888	3,328609	2,499444

Общие понятия

Тесты для проверки усвоения пройденного материала

1. Основные категории используются в финансово-экономических расчетах.

1. Принцип неравноценности денег заключается в том, что:
   A) деньги обесцениваются со временем;
   B) деньги приносят доход;
   C) равные по абсолютной величине денежные суммы, относящиеся к различным моментам времени, оцениваются по-разному;
   D) "сегодняшние деньги ценнее завтрашних денег".

2. Финансово-коммерческие расчеты используются для:
   A) определения выручки от реализации продукции.
   B) расчета кредитных операций.
   C) расчета рентабельности производства.
   D) расчета доходности ценных бумаг.

3. Подход, при котором фактор времени играет решающую роль, называется:
   A) временной;
   B) статический;
   C) динамический;
   D) статистический.

4. Проценты в финансовых расчетах:
   A) это доходность, выраженная в виде десятичной дроби;
   B) это абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в любой его форме;
   C) показывают, сколько денежных единиц должен заплатить заемщик за пользование в течение определенного периода времени 100 единиц первоначальной суммы долга;
   D) это %.

5. Процентная ставка - это:
   A) относительный показатель, характеризующий интенсивность начисления процентов;
   B) абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в любой его форме;
   C) ставка, зафиксированная в виде определенного числа в финансовых контрактах;
   D) отношение суммы процентных денег к величине ссуды.

6. В качестве единицы времени в финансовых расчетах принят:
   A) год;

B) квартал;
C) месяц;
D) день.

7. Наращение-это:
A) процесс увеличения капитала за счет присоединения процентов;
B) базисный темп роста;
C) отношение наращенной суммы к первоначальной сумме долга;
D) движение денежного потока от настоящего к будущему.

8. Коэффициент наращения - это:
A) отношение суммы процентных денег к величине первоначальной суммы;
B) отношение наращенной суммы к первоначальной сумме;
C) отношение первоначальной суммы к будущей величине денежной суммы;
D) отношение процентов к процентной ставке.

9. Виды процентных ставок в зависимости от исходной базы:
A) постоянная, сложная;
B) простая, переменная;
C) простая, сложная;
D) постоянная, переменная.

10. Фиксированная процентная ставка - это:
A) ставка, неизменная на протяжении всего периода ссуды;
B) ставка, применяемая к одной и той же первоначальной сумме долга;
C) ставка, зафиксированная в виде определенного числа в финансовых контрактах;
D) отношение суммы процентных денег к величине ссуды.

2. Операции наращения

1. Наращение - это:
   A) процесс увеличения капитала за счет присоединения процентов;
   B) базисный темп роста;
   C) отношение наращенной суммы к первоначальной сумме долга;
   D) движение денежного потока от настоящего к будущему.

2. Формула простых процентов:
   A) $S=P\cdot i\cdot n$
   B) $S=P(1+i)^n$;
   C) $S=P\cdot(1+ni)$;
   D) $S=P\cdot(1+i)$.

3. Простые проценты используются в случаях:
   A) реинвестирования процентов;
   B) выплаты процентов по мере их начисления;
   C) краткосрочных ссуд, с однократным начислением процентов;
   D) ссуд, с длительностью более одного года.

4. Точный процент -это:
   A) капитализация процента;
   B) коммерческий процент;
   C) расчет процентов, исходя из продолжительности года в 365 или 366 дней;
   D) расчет процентов с точным числом дней финансовой операции.

5. Точное число дней финансовой операции можно определить:
   A) по специальным таблицам порядковых номеров дней года;
   B) используя прямой счет фактических дней между датами;
   C) исходя из продолжительности каждого целого месяца в 30 дней;
   D) считая дату выдачи и дату погашения ссуды за один день.

6. Французская практика начисления процентов:
   A) обыкновенный процент с приближенным числом дней финансовой операции;
   B) обыкновенный процент с точным числом дней финансовой операции;
   C) точный процент с точным числом дней финансовой операции;
   D) точный процент с приближенным числом дней финансовой операции.

7. Германская практика начисления процентов:
   A) обыкновенный процент с приближенным числом дней финансовой операции;
   B) обыкновенный процент с точным числом дней финансовой операции;
   C) точный процент с точным числом дней финансовой операции;

D) точный процент с приближенным числом дней финансовой операции.

8. Английская практика начисления процентов:

A) обыкновенный процент с приближенным числом дней финансовой операции;

B) обыкновенный процент с точным числом дней финансовой операции;

C) точный процент с точным числом дней финансовой операции;

D) точный процент с приближенным числом дней финансовой операции.

9. Расчет наращенной суммы в случае дискретно изменяющейся во времени процентной ставки по схеме простых процентов имеет следующий вид:

A) $S=P\cdot(1+\Sigma n_k i_k)$

B) $S= P\Sigma(1+n_k i_k)$;

C) $S=P(1+ n_1 i_1)(1+ n_2 i_2)\colon (1+n_k i_k)$;

D) $S=P(1+ni_k)$.

10. Срок финансовой операции по схеме простых процентов определяется по формуле:

A) $n=I/(P\cdot i)$

B) $n=[(S-P)/(S\cdot t)]i$

C) $n=[(S-P)/(P\cdot i)]T$

D) $n=[(S-P)/(P\cdot t)]T$

11. Если в условиях финансовой операции отсутствует простая процентная ставка, то:

A) этого не может быть;

B) ее можно определить по формуле I = [(РУ- РУ)/ (РУ*1)]*Т

C) ее невозможно определить

D) ее можно определить по формуле / = X процентных чисел / дивизор

12. Формула сложных процентов:

A) $S=P\cdot(1+ni)$

B) $S=P\cdot(1+t/T\cdot i)$

C) $S=P\cdot(1+i)^n$

D) $S=P\cdot(1+ni)(1+i)^n$

13. Начисление по схеме сложных процентов предпочтительнее:

A) при краткосрочных финансовых операциях;

B) при сроке финансовой операции в один год;

C) при долгосрочных финансовых операциях;

D) во всех вышеперечисленных случаях.

14. Чем больше периодов начисления процентов:

A) тем медленнее идет процесс наращения;

B) тем быстрее идет процесс наращения;

C) процесс наращения не изменяется;
D) процесс наращения предсказать нельзя.

15. Номинальная ставка - это:
A) годовая ставка процентов, исходя из которой определяется величина ставки процентов в каждом периоде начисления, при начислении сложных процентов несколько раз в год;
B) отношение суммы процентов, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды;
C) процентная ставка, применяется для декурсивных процентов;
D) годовая ставка, с указанием периода начисления процентов.

16.Формула сложных процентов с неоднократным начислением процентов в течение года:
A) $S=P\cdot(1+i)^{mn}$
B) $S=P\cdot(1+j/m)^{mn}$
C) $S=P/m\cdot(1+i)^{n\,m}$
D) $S=P\cdot(1+i\cdot m)^{mn}$

17. Эффективная ставка процентов:
A) не отражает эффективности финансовой операции;
B) измеряет реальный относительный доход;
C) отражает эффект финансовой операции;
D) зависит от количества начислений и величины первоначальной суммы.

18. Формула сложных процентов с использованием переменных процентных ставок:
A) $S=P\cdot(1+i_1)^{n_1}\cdot(1+i_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(1+i_k)^{n_k}$
B) $S=P\cdot(1+n_k i_k)$
C) $S=P\cdot(1+n_1 i_1\cdot n_2 i_2\cdot\ldots\cdot n_k i_k)^{nk}$
D) $S=(1+in)(1+i)$

19. В случае, когда срок финансовой операции выражен дробным числом лет, начисление процентов возможно с использованием:
A) общего метода;
B) эффективной процентной ставки;
C) смешанного метода;
D) переменных процентных ставок.

20. Смешанный метод расчета:
A) $S=P\cdot(1+i)^{a+b}$
B) $S=P\cdot(1+i)^{a}\cdot(1+bi)$

C) $S = P \cdot (1 + abi)^n$

D) $S = P \cdot (1 + i)^n \cdot (1 + i)^b$

21. Непрерывное начисление процентов - это:
    A) начисление процентов ежедневно;
    B) начисление процентов ежечасно;
    C) начисление процентов ежеминутно;
    D) начисление процентов за нефиксированный промежуток времени.

22. Если в условиях финансовой операции отсутствует ставка сложных процентов, то:
    A) ее определить нельзя;
    B) $i = \sqrt[n]{S / P} - 1$
    C) $i = \ln(S / P) / \ln(1 + n)$
    D) $i = \lim(1 + j / m)^m$
    E) $i = \lim(1 + j / m)^m - 1$

3. Операции дисконтирования

1. Дисконтирование- это:
   A) процесс начисления и удержания процентов вперед;
   B) определение значения стоимостной величины на некоторый момент времени при условии, что в будущем она составит заданную величину;
   C) разность между наращенной и первоначальной суммами;
   D) приведение будущих денег к текущему моменту времени, и при этом не имеет значения, имела ли место в действительности данная финансовая операция или нет.

2. Банковский учет - это учет по:
   A) учетной ставке;
   B) процентной ставке;
   C) ставке рефинансирования;
   D) ставке дисконтирования.

3. Антисипативные проценты - это проценты, начисленные:
   A) с учетом инфляции;
   B) по учетной ставке;
   C) по ставке процентов;
   D) без учета учетной ставки.

4. Дисконтирование по сложным процентам осуществляется по формуле:
   A) $P = S \cdot (1+i)^{-n}$;
   B) $P = S \cdot (1+i)^{-1}$;
   C) $P = S \cdot (1-d)^{n}$
   D) $P = S \cdot (1+i)^{n}$

5. Дисконтирование по простой учетной ставке осуществляется по формуле:
   A) $P = S \cdot (1-d)^{n}$;
   B) $P = S \cdot (1-d)^{-n}$;
   C) $P = S \cdot (1-nd)$;
   D) $P = S \cdot (1+nd)^{-1}$.

6. Чем меньше процентная ставка, тем
   A) выше современная величина;
   B) ниже современная величина;
   C) на современную величину это не оказывает влияния.

7. Какой вид дисконтирования выгоднее для векселедержателя:
   A) математическое дисконтирование;
   B) банковский учет;
   C) разница отсутствует.

8. Декурсивные проценты – это проценты, начисленные

A) с учетом инфляции;

B) по учетной ставке;

C) без учета учетной ставки;

D) по ставке процентов.

9. Математическое дисконтирование – определение первоначальной суммы для процентной ставки. В процентной ставке первоначальная сумма определяется формулой

A) $i = (S - P) \cdot P$;

B) $i = P : (S - P)$;

C) $i = (S - P) : P$;

D) $i = \ln(S - P) : P$.

10. Математическое дисконтирование – определение первоначальной суммы для учетной ставки. В учетной ставке за базу принимается наращенная сумма долга

A) $d = (P - S) / P$;

B) $d = (S - P) / P^2$;

C) $d = (S - P) / S$;

D) $d = P / (S - P)$.

11. Пользуясь формулой простых процентов определить срок ссуды менее года по формуле (математическое дисконтирование)

A) $P = S \cdot (1 + t / T) i$;

B) $P = S \cdot (1 + t / T \cdot i)$;

C) $P = (1 + t / T \cdot i) : S$;

D) $P = S \cdot 1/(1 + t / T \cdot i) : S$.

12. Пользуясь формулой сложных процентов определить срок ссуды менее года по формуле

A) $S = P \cdot (1 + i)^{-n}$;

B) $P = S \cdot (1 + i)^{-n}$;

C) $P = S : (1 + ni)$;

D) $P = (1 + i)^n : S$.

13. Сумма консолидированного платежа рассчитывается по следующей формуле (банковский учет) (объединение платежей $S_{об}$):

A) $S_{об} = \sum S_j : \sum (1 - dt_j)^{-1}$;

B) $S_{об} = \sum S_j : (1 - dt_j)^{-1}$;

C) $S_{об} = \sum S_j \cdot (1 - dt_j)^{-1}$;

D) $S_{об} = \sum S_j : (1 - dt_j)^{-1}$.

14. Сумма, полученная при учете обязательства определяется формулой (банковский учет):

A) $PV_2 = PV_1 \cdot (1 + n_1 \cdot i) : (1 - n_2 \cdot d)$;

B) $PV_2 = PV_1 \cdot (1 - n_2 \cdot d) : (1 + n_1 \cdot i)$;

C) $PV_2 = PV_1 : (1 - n_2 \cdot d) : (1 + n_1 \cdot i)$;

D) $PV_2 = PV_1 \cdot (1 + n_1 \cdot i) \cdot (1 - n_2 \cdot d)$;

E) $PV_2 = (1 + n_1 \cdot i) : (1 - n_2 \cdot d) : PV_1$

где PV_1 – первоначальная сумма долга

PV_2 – сумма, полученная при учете обязательства

n_1 – общий срок платежного обязательства

n_2 – срок от момента учета до погашения

4. Поток платежей и финансовые ренты

1. Поток платежей - это:
   A) рост инвестированного капитала на величину процентов;
   B) распределенные во времени выплаты и поступления;
   C) перманентное обесценивание денег;
   D) платеж в конце периода.

2. Вечная рента - это:
   A) рента, подлежащая безусловной выплате;
   B) рента с выплатой в начале периода;
   C) рента с бесконечным числом членов;
   D) рента с неравными членами.

3. Аннуитет - это:
   A) частный случай потока платежей, когда члены потока только положительные величины;
   B) частный случай потока платежей, когда число равных временных интервалов ограничено;
   C) частный случай потока платежей, когда члены равны и имеют одинаковую направленность, а периоды ренты одинаковы;
   D) частный случай потока платежей, когда члены не равны и имеют одинаковую направленность, а периоды ренты одинаковы.

4. Наращенная величина годовой постоянной обычной ренты определяется по формуле:
   A) $S_A = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$;
   B) $S_A = R \cdot (1+i)^n - 1$;
   C) $S_A = R \cdot \frac{1-(1+i)^n}{i}$;
   D) $S_A = R \cdot \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{(1+j/m)^m - 1}$.

5. Наращенная сумма ренты пренумерандо рассчитывается по формуле:
   A) $S_A = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$;
   B) $S_A = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$;
   C) $S_A = R \cdot \frac{1-(1+i)^n}{i}(1+i)$;
   D) $S_A = R \cdot \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{(1+j/m)^m - 1}$.

6. Для определения члена ренты необходимо знать:
   A) наращенную сумму;
   B) первоначальную сумму;
   C) первоначальную и наращенную сумму;
   D) только процентную ставку и срок ренты.

7. Современная величина годовой обычной ренты определяется по формуле:
   A) $S_A = R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}$;
   B) $S_A = R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$;
   C) $S_A = R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$;
   D) $S_A = R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}(1-i)$.

10. Для оценки бессрочного аннуитета не имеет смысла определение:
   A) современной величины аннуитета;
   B) наращенной величины аннуитета;
   C) члена ренты;
   D) имеют место все пункты A, B, C.

11. Нерегулярные потоки платежей характеризуются присутствием нерегулярного параметра:
   A) периода ренты;
   B) размера платежа;
   C) процентной ставки;
   D) наращенной суммы.

12. Для бессрочного аннуитета постнумерандо формула современной величины принимает следующий вид:
   A) $S_A = \frac{R}{1-i}\cdot\frac{1}{1-[1/(1+i)]}$;
   B) $S_A = R\cdot\frac{1}{1-[1/(1+i)]}$;
   C) $S_A = \frac{R}{1+i}\cdot[1-1/(1+i)]$;
   D) $S_A = \frac{R}{1+i}\cdot\frac{1}{1-[1/(1+i)]}$.

1. Уровень инфляции показывает:
   A) во сколько раз выросли цены;
   B) во сколько раз цены снизились;
   C) на сколько процентов цены возросли;
   D) устойчивый рост среднего уровня цены.

2. Расчет уровня инфляции за период осуществляется:
   A) по простым процентам;
   B) по сложным процентам;
   C) по смешанному методу;
   D) устойчивому росту среднего уровня цены.

3. Если уровень инфляции ниже процентной ставки, то это:
   А - уменьшение первоначальной денежной суммы;
   В - рост реальной денежной суммы;
   С - роста денежной суммы не будет;
   D) увеличение первоначальной суммы.

4. Реальная доходность финансовой операции определяется:
   A) с использованием реальной ставки процентов;
   B) с использованием номинальной ставки процентов;
   C) с использованием эффективной ставки;
   D) с использованием реальной или номинальной ставки.

5. Общая формула для определения простой ставки процентов, компенсирующая ожидаемую инфляцию определяется формулой:
   A) $i_\tau = (1 + n \cdot i) \cdot I_\tau - 1/n$;
   B) $i_\tau = [1 + ni \cdot I_\tau - 1] : n$;
   C) $i_\tau = [(1 + ni) \cdot I_\tau - 1] : n$;
   D) $i_\tau = [(1 + ni) \cdot I_\tau - 1] \cdot n$.

6. Формула для исчисления наращенной суммы с учетом влияния инфляции имеет вид:
   A) $S = P(1+\tau)^n / (1+i)^n$;
   B) $S = P(1+\tau)^n (1+i)^n$;
   C) $S = P\ln(1+\tau)/\ln(1+i)$;
   D) $S = P(1+i)^n / (1+\tau)^n$.
   где i – ставка доходности
   τ – показатель инфляции

7. Общая формула для определения простой ставки процентов, компенсирующей ожидаемую инфляцию, имеет вид:

A) $i_r = (1+i)\cdot\left(\sqrt[n]{1+\tau}-1\right)$;
B) $i_r = (1-i)/\left(\sqrt[n]{1+\tau}-1\right)$;
C) $i_r = \left[(1+i)/\sqrt[n]{1+\tau}\right]-1$;
D) $i_r = \left[(1+i)/\sqrt[n]{1+\tau}-1\right]$.

6. Разовый платёж

1. Если номинальная процентная ставка составляет 10%, а темп инфляции определен в 4% в год, то реальная процентная ставка составит:
   1) 14%;
   2) 6%;
   3) 2,5%;
   4) -6%;
   5) 4%.

2. В год «1» уровень цен не изменяется, номинальная ставка процента составляет 6%. В год «2» темп инфляции составил 3%. Если реальная ставка процента в году «2» на том же уровне, что и в году «1», то номинальная ставка процента в году «2» должна:
   1) вырасти на 9%;
   2) вырасти на 3%; •
   3) снизиться на 3%;
   4) вырасти на 6%;
   5) остаться неизменной на уровне 6%.

3. Положительное решение о строительстве моста, который должен служить 200 лет и приносить прибыль в размере 10%, будет принято при условии, что процентная ставка составит:
   1) не более 2%;
   2) не более 20%;
   3) 10% или менее;
   4) увеличивается, то при прочих равных

4. Фирма желает взять заем на покупку нового оборудования, которое будет стоить 20000 ден. ед. и служить 1 год. Ожидается, что благодаря этому дополнительный годовой доход составит 1500 ден. ед. Фирма осуществит инвестиции в оборудование при условии, что процентная ставка составит:
   1) 6%
   2) 8%;
   3) 10%;
   4) 15%;
   5) 4%.

5. При ставке дисконтирования в 10% коэффициент дисконтирования первого года будет равен:
   1) 0,80;
   2) 0,83;
   3) 0,89;

4) 0,91;
5) все ответы неверны.

6. Индивидуальный предприниматель купил оборудование на сумму 250 тыс. руб., рассчитывая продать его в конце 1-го года за 300 тыс. руб. за вычетом налогов. Предполагаемая доходность инвестиций составит:
   1) 10%;
   2) 15%;
   3) 20%;
   4) 25%.

7. Депозитная ставка равна 7% с начислением по сложному: годовому проценту. Определить период времени, по истечении которого процентные деньги сравняются с величиной вклада:
   1) 5 лет;
   2) 10 лет;
   3) 12 лет;
   4) всегда будут меньше;
   5) все ответы неверны.
8. Если темп инфляции увеличивается, то при прочих равных Условиях в соответствии с эффектом Фишера (правилом компенсации *(j=i+r+ir)*:
   1) номинальная и реальная ставки процента понизятся;
   2) номинальная и реальная ставки процента повысятся;
   3) номинальная и реальная ставки процента не изменятся;
   4) номинальная ставка процента повысится, реальная — не изменится;
   5) номинальная ставка процента не изменится, реальная — снизится.
9. По условиям одного из двух обязательств должно быть выплачено 500 тыс. руб. через 4 месяца; второго —540 тыс. руб. через 8 месяцев. Применяется простая процентная ставка 18%. Какое из этих условий выгоднее для должника:
   1) первое;
   2) второе;
   3) равноценны;
   4) имеющейся информации недостаточно.

10. Проценты на проценты начисляются в схеме:
   1) сложных процентов;
   2) простых процентов;
   3) как сложных, так и простых процентов;
   4) независимо от схемы проценты начисляются только на основной капитал, но не на проценты.

11. Если реальная ставка инвестирования в некотором году была равна 6,0%, а номинальная - 11,3%, то каков был уровень инфляции в этом году?

1) 5,3%;

2)5%;

3) 105%

4) все ответы неверны

12. На вклад P начисляются сложные проценты по годовой ставке /. Величина процентов, начисленных за второй год хранения вклада, составит сумму Е, равную:

1) $2Pi + Pi^2$;

2) $PI + PI^2$

3) $P(1+i)^2 - P$

13. Капитал в 1 млн руб. может быть помещен в Сбербанк на 3 месяца с ежемесячным начислением 3% (по ставке сложных процентов) или на срочный вклад на 3 месяца, по которому в конце 3-го месяца начисляется 9%. Определить наиболее пред почтительный способ помещения капитала:

1) второй;

2) первый;

3) никакой разницы, доход одинаковый.

14. Господин Сидоров рассматривает три доступных ему способа вложения денег на ближайшее полугодие: в Сбербанк на 6 месяцев с ежемесячным начислением процентов исходя из годовой ставки 12%; б) с трехмесячным начислением под 12,4% годовых; в) срочный валютный депозит (в долл. США) на 6 месяцев при 8,5% в год. Текущий курс составляет 28 руб. и согласно прогнозам поднимется до 28,5 руб. за 1 долл. к концу полугодия. Расположить эти способы в порядке убывания выгодности:

1)а, б, в;

2) в, б, а;

3) б, в, а;

4) б, а, в.

15. Цену изделия дважды снижали на 50%, а затем на 300% увеличили. В результате этого цена:

1) увеличилась на 200%;

2) возросла в три раза;

3) вернулась к первоначальному уровню;

4) ответ, не предусмотренный п. 1 (— 3).

16. Найти квартальные ставки начисления *(г)* и удержания (/) сложных процентов, которые эквивалентны годовой ставке, равной 20%:

1) $r \approx 4,7\%$, $j \approx 4,2\%$;
2) $r = 5\%$, $j \approx 4,5\%$;
3) $r \approx 4,7\%$, $j \approx 4,5\%$;
4) $r = 5\%$, $y \approx 4,2\%$;
5) все ответы неверны.

17. Срок оплаты по долговому обязательству на сумму 5 млн. руб. наступает через 5 лет. Годовая учетная ставка равна 15%. Имеется три способа продажи этого обязательства:

а) с годовым удержанием сложных процентов;
б) то же при простой учетной ставке;
в) с дисконтом при полугодовом учете по сложной ставке.

18. Определить способ, наиболее предпочтительный для продавца, и указать разницу в доходах по сравнению с наихудшим вариантом:

1) способ «б» лучше, разница 1042912 руб.;
2) никакой разницы, доход одинаковый;
3) способ «а» лучше, разница 968527 руб.;
4) способ «в» лучше, разница 1042912 руб.;
5) способ «в» лучше, разница 74385 руб.

19. Допустим, что годовые ставки начисления простого и сложного процента одинаковы. Сравнить результаты начисления; в зависимости от срочности вклада:

1) сложный процент всегда выгоднее для вкладчика независимо от периода начисления;
2) для долгосрочных депозитов (больше года) сложный процент выгоднее простого;
3) для краткосрочных депозитов (меньше года) простой процент отстает от начисления сложного процента;
4) в пределах года простой процент выгоднее сложного.

20. Сравнить динамику удержания сложных и простых процентов при одной и той же годовой учетной ставке:

1) внутри года дисконт по простой учетной ставке больше, чем для удержания сложного процента;
2) при сроках больше года сложные проценты удерживают меньшую сумму, чем простые;
3) дисконтирование по сложной учетной ставке перекрывает простую ставку при любых сроках;
4) для краткосрочного учета (меньше года) дисконт по сложной ставке больше, а за пределами года наоборот.

21. Студент, который держит деньги на банковском счете при 8%-ной ставке, решил подписаться на журналы. Годовая подписка стоит 12 долл., а двухгодичная — 22 долл. Определить:

а) в какую сумму обошлась ему подписка на второй год;

б) какая подписка выгоднее: двухгодичная или две на год при депозитной ставке 30%?

1) 10;

2) 11;

3) 10,8;

4) выгоднее двухгодичная подписка.

7. *Потоки платежей*

1. В потоке платежей разрешается переставлять платежи произвольным образом. Как их надо переставить, чтобы современная величина потока была наибольшей:
   1) в порядке возрастания;
   2) в порядке, который дает наименьшую наращенную сумму;
   3) в порядке, который дает наибольшую наращенную сумму;
   4) в порядке убывания;
   5) имеющейся информации недостаточно?
2. Гражданину Петрову предлагается на выбор один из четырех вариантов трехгодовой ренты общей суммой 180 тыс. руб.:
   а) равными платежами в конце каждого года;
   б) равными платежами в конце нечетных годов;
   в) одним платежом в конце второго года;
   г) равными последовательными выплатами в конце каждого полугодия.

Петров как получатель денег имеет возможность ежегодного начисления процентов исходя из годовой ставки / и, анализируя

варианты, затрудняется в выборе наилучшего. Какой вариант вы ему посоветовали бы:

1) а;
2) б;
3) в;
4) г;
5) ответ зависит от числового значения ставки i?

3. Имеются три варианта замены годовой ренты постнумерандо (π_1 с параметрами R=90 тыс. руб., n=3 года, i=10%. При тех же длительностях и ставке процента даты начала и размеры выплат для рассматриваемых рент заданы следующими условиями:

π_2 — рента пренумерандо с платежом R = 85;

π_3 — отложенная на один период рента с платежом R = 100;

π_4 — отложенная на два периода рента с платежом R = 107.

Расположите все ренты в порядке убывания их выгодности для получателя денег:

1) $\pi_3 : \pi_4 ; \pi_1 ; \pi_2$
2) $\pi_2 ; \pi_3 ; \pi_1 ; \pi_4$
3) $\pi_2 ; \pi_4 ; \pi_3 ; \pi_1$
4) $\pi_1 ; \pi_2 ; \pi_4 ; \pi_3$

4. На ближайшие 3 года общая сумма обязательств Петра перед Павлом составляет 400 тыс. руб., которые ему разрешается погасить не более чем за 3 раза. Согласно договоренности платежи могут

производиться только в конце года и последняя выплата втрое превышает первую. Петр пытается найти наиболее выгодный для себя вариант предстоящих ему перечислений. Если приемлемый для него показатель доходности вложений — 10%, то оптимальные выплаты должны оставлять следующую последовательность:

1) 75; 100; 225;
2) 90; 40; 270;
3) 50; 200; 150;
4) среди перечисленных вариантов оптимального нет.

5. Для одних и тех же годовых выплат, продолжительности и номинальной процентной ставки i расположите в порядке возрастания наращенной суммы$\{S_k\}$следующие ренты:

S_1; p – срочная с начислением процентов m раз в году (p>1,m>1);

S_2: p - срочная с непрерывным начислением процентов (p>1,$\delta = i$)

S3: годовая рента с начислением по сложной ставке;

S4 : p — срочная с начислением процентов один раз в году (p->1);

S_5: годовая рента с начислением по простой ставке.

1)$S_5: S_1 : S_4 : S_3 : S_2$
2)$S_4. S_1; S_2; S_5; S_3$;
3) $S_3; S_5; S_2; S_4; S_1$;
4) $S_5; S_3; S_4; S_1; S_2$;

6. Победитель в конкурсе «А вам слабо?» получает в качестве назначенного организаторами приза ежегодный доход в 1000 долл. без ограничения срока действия этих поступлений. Ставка процента выросла с 8 до 10%. Тогда обладатель данного выигрыша будет иметь:

1)потери капитала в 400 долл.;
2)потери капитала в 500 долл.;
3)доход от прироста капитала в 500 долл.;
4)потери капитала в 2500 долл.;
5)доход от прироста капитала в 2500 долл.

7. Последовательность разновременных выплат заменяется одним платежом на дату, превышающую срок последней выплаты. Для определения заменяющего платежа применяют простые проценты. Чтобы найти финансово эквивалентную величину консолидирующей выплаты, можно воспользоваться:

1) равенством современных величин заменяемого потока и разовой выплаты;
2) равенством наращенной суммы потока платежей на дату разовой выплаты величине этой выплаты;
3) равенством современных величин или равенством наращенных сумм

потока и искомого платежа — результат от этого не зависит.

8. Вы прочитали рекламное объявление: «Платите нам ежегодно любую доступную для вас сумму в течение 10 лет, а потом мы будем выплачивать вам ту же сумму в год бесконечно». Определить выгодность сделки:
   1) эта сделка стоящая, если процентная ставка не превышает 9%;
   2) это выгодно только в том случае, если размер взносов не больше 40 тыс. руб., а ставка ниже 5%;
   3) при величине взносов больше 80 тыс. руб. данное предложение невыгодно при любом значении процентной ставки;
   4) сделка целесообразна при значении ставки не больше, чем 7%, и произвольном размере выплаты.
9. Клиент сделал вклад на текущий счет в банке в сумме 100 тыс. руб. под простую ставку 14% годовых. Затем через 3 и 9 месяцев он вложил еще по 10 тыс. руб., а в промежутке, в конце 6-го месяца, снял со счета 20 тыс. руб. По завершении года клиент закрыл счет и забрал причитающиеся ему деньги. Определить, какое правило депозитного обслуживания (коммерческое или актуарное) выгоднее для вкладчика, и указать разницу в доходах:
   1) полная сумма счета на конец года будет одна и та же независимо от используемого банком правила;
   2) полученная по актуарному правилу сумма будет больше на 510 руб.;
   3) для клиента выгоднее коммерческое правило, разница в доходах - 675руб.;
   4) предпочтительнее актуарное правило, разница - 830 руб.;
   5) иной ответ.
10. Некто Иванов купил квартиру за P тыс. долл. и собирается неограниченно долго сдавать ее в аренду. В своей оценке $R\infty$, минимально приемлемого для него размера годового арендного платежа он использует ставку банковского процента т. Однако его супруга Ольга настаивает на продаже квартиры через n лет и ограничивает аренду этим сроком. Как при этом изменится оценка R_n арендной платы в зависимости от рыночной цены квартиры P_n на дату n? Найти процентное соотношение R_n от $R\infty$ при условии, что $P_n=0,8P$, $r=10\%$, $n=2$
    1) арендная плата не зависит от соотношения цен P и P_n;
    2) при удорожании $(P_n > P)$ арендная плата увеличится $(R_n > R\infty)$;
    3) при падении цен на недвижимость $(P_n < P)$ приемлемая для него арендная плата возрастет $(R_n > R\infty)$;
    4) минимально приемлемый платеж возрастет на 95%;
    5) минимально приемлемый платеж снизится на 20%.
11. Какую сумму должен отец вложить сегодня на накопительный вклад при простой годовой ставке 8%, чтобы обеспечить сыну ежегодные выплаты в размере 1000 у.е. в течение 4 лет обучения в колледже:
    1) 3393,94 у.е.;

2) 3312,13 у.е.;
3) иной ответ?

12. Маша следует тенденциям моды, поэтому покупает себе каждый сезон новую сумку. Ее мама любит классику и предпочитает дорогие кожаные сумки, которые носит в среднем в течение 4 лет. На новый год папа дал жене и дочери на обновки по 200 долларов. Определить:
   а) на сколько сезонов хватит Маше этих денег, если она будет каждый год приобретать по сумке стоимостью 50 долл., а остаток хранить на банковском счете с годовой процентной ставкой 12,6%;
   б) по какой максимальной цене может покупать сумки Маша, чтобы они с мамой «износили» свои сумки в одно и то же время?
   1) 5 лет;
   2) 4 года;
   3) 50 долл.;
   4) 59,22 долл.;
   5) 57,14 долл.
13. У Надежды Барышевой, работающей младшим бухгалтером с годовой зарплатой 144 тыс. руб., есть возможность окончить годичный курс обучения стоимостью 60 тыс. руб. и занять должность старшего бухгалтера. На сколько выше должна быть зарплата старшего бухгалтера, чтобы обучение было целесообразным, если Надежда считает приемлемой для себя нормой отдачи на вложения 15% годовых и собирается работать в новой должности:

а) всю оставшуюся трудовую жизнь (35—40 лет);
б) три года?
   1) а) 30,6 тыс. руб.;
   2) а) 9 тыс. руб.;
   3) б) 89,347 тыс. руб.;
   4) б) 26, 279 тыс. руб.
14. В потоке платежей разрешается переставлять платежи произвольным образом. Как их надо переставить, чтобы средний срок выплаты (дюрация) был наименьшим:
   1) в порядке возрастания;
   2) в порядке, который дает наименьшую наращенную сумму;
   3) в порядке, который дает наибольшую наращенную сумму;
   4) в порядке убывания?
15. Банк А выплачивает сложные проценты раз в полгода - Банк Б выплачивает 15% годовых по простой процентной ставке. Вкладчик разместил по одинаковой сумме денег в каждом из этих банков сроком на 2 года. Какую полугодовую процентную ставку должен начислять банк А, чтобы у вкладчика по итогам двух лет сумма вклада в банке А была на 10% больше, чем в банке Б?

1) 10,75%;
2) 8,64%;
3) 9,35%;
4) для ответа на вопрос необходимо знать величину первоначального вклада.

16. Банк А выплачивает сложные проценты раз в полгода по ставке 15% годовых. Банк Б выплачивает простые проценты. Вкладчик разместил по одинаковой сумме денег в каждом из этих банков сроком на 3 года. Какую процентную ставку должен начислять банк Б, чтобы у вкладчика по итогам трех лет суммы в банках А и Б были одинаковыми?
    1) 16,45%;
    2) 17,36%;
    3) 18,11%;
    4) 19,74%;
    5) для ответа на вопрос необходимо знать величину первоначального вклада.

8. *Кредит*

1. Как будет в годовых бухгалтерских балансах отмечаться задолженность предприятия по кредиту в объеме D, выданному под ставку i на срок T при использовании схемы равных процентных выплат:
1) растет;
2) убывает;
3) сохраняет постоянное значение *D для* первых (T - 1) балансов;
4) задолженность в балансе с номером T равна нулю

2. Рассматриваются следующие схемы обслуживания долго срочной задолженности:
а) равными срочными уплатами;
б) разовое погашение в конце срока;
в) равными процентными выплатами.
Расположить в порядке убывания остатка задолженности на любую промежуточную дату:
1)б, в, а;
2) а, б, в;
3)а, в, б;
4) в, а, б.
3. Кредитная ставка равна 14%.Определить период времени, то истечении которого процентные деньги сравняются с величиной основного долга:
1)10 лет;
2) 5 лет;
3) всегда будут меньше;
4) имеющейся информации недостаточно.
4. Компания «Аромат-престиж» нуждается в краткосрочном до года) кредите в 10 млн руб. для создания запасов к Рождеству. Банк А предлагает кредит под 8% годовых с удержанием комиссионных в размере 5% суммы кредита. Банк Б предлагает ссуду под 10% без Дополнительных условий. Какой банк предлагает Лучшие условия? При каком размере комиссионных предлагаемые условия будут равно выгодны?
1)А
2)Б;
3) 1,82%;
4)2%;
5)6,15%.
5. Кредит L_1 = 10000 долл. выдан по сложной ставке 10% годовых на 3 года и погашается в рассрочку ежегодными платежами. Первые две выплаты в счет его погашения равны 800 и 1200 долл. Обозначим задолженность на начало 2-го и 3-го годов, оставшуюся после очередного взноса, через L_2 и $L3$. Расположить величины L_1 L_2 L_3 в порядке убывания:

1) L_1, L_2, L_3

2) L_3, L_2, L_1

3) L_2, L_3, L_1

4) L_3, L_1, L_2

6. У господина N имеется 4 возможных варианта заимствования необходимой ему суммы под 8% годовых на 180 дней с момента подписания договора:
   1) по простой ставке начисления процентов;
   2) под ставку сложного процента;
   3) при условии, что применяется простая учетная ставка;
   4) по сложной учебной ставке.

По всем рассматриваемым вариантам принята одна и та же временная база, равная 360 дням. Какой вариант вы бы ему рекомендовали?

7. Банк учитывает вексель за n месяцев до срока его оплаты по простой учетной ставке годового процента d. Как меняется доходность этой операции, измеряемая годовой ставкой сложных процентов, с увеличением срока от момента учета до момента оп латы векселя:
   1) изменение доходности в зависимости от n носит немонотонный характер;
   2) растет;
   3) убывает;
   4) может расти, а может и убывать в зависимости от числового значения d.
8. Рассматриваются два способа льготной реструктуризации кредиторской задолженности. По первому варианту заемщику прощаются проценты, по второму — основной долг. Какая из схем выгоднее для кредитора, если период отсрочки равен 4 годам, а ставка по кредиту — 20%.

1) вторая;
2) первая;
3) выгодность схемы зависит от величины задолженности.

9. Стиральная машина стоит 7900 руб. При покупке ее в кредит на 4 месяца выплачивается первый взнос, а оставшаяся сумма погашается ежемесячными платежами, составляющими 28% от размера кредита. Определить номинальную годовую ставку потребительского кредита на стиральную машину:
   1) 36%;
   2) 56%;
   3) для ответа на вопрос необходимо знать величину первого взноса;
   4) все ответы неверны.
10. При выдаче ссуды на 180 дней под 10% годовых по простой ставке кредитором удержаны комиссионные в размере 0,5% суммы кредита. Какова эффективность ссудной операции в виде

годовой ставки сложных процентов при условии, что год равен 360 дням:

1)11,05%;

2)11,36%;

3) 10,25%;

4) все ответы неверны.

11. При выдаче кредита в 6000 руб. на 60 дней под 30% годовых по простой ставке кредитором в момент его предоставления были удержаны проценты. Какова доходность кредитной операции, измеряемая простыми процентами?

I 1) 32,46%;

2)30,95%;

3)31,58%;

4) иной ответ.

12. Кредит в 20 млн руб. выдан на 2 года под ставку 10%. Согласно договору все проценты должны быть выплачены одной суммой в начале срока. Исходя из этого финансовый менеджер предложил руководству четыре варианта погашения кредита. В каких вариантах или варианте он ошибся?

1) (3,471074; 10; 9);

2) (4,2; 0; 19,118);

3) (3,471074; 0; 20);

4) (4,2; 15; 2,618).

13. Долг, равный 300 тыс. руб., необходимо погасить за 3 года. За заем выплачиваются проценты по ставке 10% годовых. Расположить в порядке возрастания среднего срока срочной уплаты дюрации) следующие схемы погашения:

а) равными частями долга;

б) разовое погашение в конце срока;

в) равными процентными выплатами;

1) а, б, в;

2) а, в, б;

3) в, а, б;

4) в, б, а.

14. Пусть кредит, равный 4 млн 840 тыс. руб., необходимо погасить равными процентными выплатами за 2 года. Предприятию, решившему создать фонд погашения основного дол достаточно выделить на эти цели в настоящее время 4 млн.руб. однако отвлечение одновременно такой суммы из хозяйственного оборота нецелесообразно. Предпочтение отдается варианту внесения двух равных платежей (в конце 1-го и 2-го годов), обеспечивающему создание такого же фонда. Определить размер требуемого платежа:

1)2125672 руб.;

2) 2213456 руб.;

3) 2304762 руб.;

4) в исходных данных не хватает числового значения начисления процентов на размещаемые в фонде средства

15. Кредит в 1000 д.е. выдан под сложную ставку 20% годовых сроком на 3 года. В потоке погасительных платежей известны первые две срочные уплаты: $У_1 = 100$, $У_2 = 400$. Исходя из требования финансовой эквивалентности, определить срочную уплату $У_3$. Выделить в каждой срочной уплате которая идет на возврат основного долга, и процентную ту, для чего использовать правило: «погашение долга произвольными суммами с начислением процентов на остаток». Чему равны проценты, выплаченные по кредиту, при такой схем погашения?

    1) 728;
    2) 604;
    3) 736;
    4) все ответы неверны

9. *Инвестиционные проекты*

1. Промышленная компания по производству подъемного оборудования решила построить новый цех для выпуска малых подъемников. С учетом прогнозируемого спроса годовой объем производства планируется на уровне 5000 подъемников, а требуемые инвестиции — 500 тыс. ден. ед. Себестоимость одного подъемника оценивается в 5 ден. ед. Допустим для простоты, что компания освобождена от налогов. Считая, что оборудование служит вечно, а условия производства меняться не будут, найдите конкурентную цену за единицу выпускаемого оборудования при условии, что альтернативная стоимость капитала — 10%:
   1) 5 ден. ед.;.
   2) 10 ден. ед.;
   3) 15 ден. ед.;
   4) 13 ден. ед.
2. Фирма рассматривает возможность покупки станка за 100 тыс. ден. ед. Станок имеет 5-летний срок службы, после этого он не имеет ценности даже в качестве металлолома. Президент компании ожидает, что внедрение станка увеличит чистый годовой доход компании на 20 тыс. ден. ед. в течение всего срока его службы. Вы посоветовали бы покупать станок, если процентная ставка находится:
   1) между 7 и 10%;
   2) между 3 и 7%;
   3) между 3 и 1%;
   4) равна 0?
3. Сегодняшняя ценность (приведенная стоимость) инвестиционного проекта — это:
   1) сумма, которая, будучи помещена в банк, вырастет за определенный период до искомой величины;
   2) сумма чистых поступлений по проекту;
   3) сумма приведенных к настоящему времени будущих чистых доходов;
   4) сумма инвестиций по проекту;
   5) сумма приведенных к настоящему времени оттоков денежных средств (инвестиций).
4. При оценке инвестиционного проекта по показателю чистой приведенной стоимости поток денежных средств от основ ной деятельности принимается в расчет:
   1) по выручке от реализации;
   2) по прибыли без налога на прибыль с учетом амортизационных отчислений;
   3) по прибыли за вычетом налога на прибыль;
   4) по прибыли без налога на прибыль с учетом изменения величины рабочего капитала (собственных оборотных средств) против предыдущего года.

5. Ставку процента в формуле чистой приведенной стоимости инвестиционного проекта обычно называют:
    1) предельными издержками;
    2) текущими издержками;
    3) инвестиционными издержками;
    4) альтернативными издержками;
    5) издержками риска.
6. Фирма в прошлом году израсходовала 20 млн руб. на сооружение нового корпуса, 6 млн - на закупку сырья и материалов в будущем корпусе, 8 млн - на капитальный ремонт старых корпусов. Каков был у этой фирмы объем инвестиций? Выберите правильный ответ:
    1) 3,4;
    2) 20;
    3) 28;
    4) 26.
7. Проекты U и V, предусматривают одинаковые расходы и имеют одинаковую внутреннюю норму доходности, которая превышает альтернативные издержки. Потоки денежных средств у проекта U больше потоков денежных средств проекта V, но возникают позже. Какой из проектов имеет более высокую чистую приведенную стоимость? Выберите правильный ответ:
    1) U;
    2) V;
    3) приведенные стоимости совпадают;
    4) исходной информации для однозначного ответа недостаточно.
8. Фирма предполагает взять банковскую ссуду на строительство нового предприятия. Годовая ставка процента составляет 18%, ожидаемая норма прибыли определена в 20%. При этих условиях фирма:
    1) не будет строить новое предприятие;
    2) будет строить новое предприятие;
    3) несмотря на убыток, решит строить предприятие;
    4) не сможет принять решение на основе имеющейся информации;
    5) такая ситуация не может иметь места.
9. Решая вопрос об инвестициях, фирмы принимают во внимание:
    1) номинальную процентную ставку
    2) реальную процентную ставку;
    3) номинальную процентную ставку за .вычетом реальной ставки процента;
    4) только другие, не указанные выше факторы;
    5) реальную ставку процента за вычетом номинальной.
10. Для оценки инвестиционного проекта применяют ставку дисконтирования, равную кредитной ставке, и не учитывают налогов (пусть наш инвестор их не платит). Как изменится показатель чистой приведенной стоимости проекта *(NPV)* при переходе

от 100%-го инвестирования собственного капитала (i = СК) к частичному или полному финансированию проекта заемным капиталом (i= СК + ЗК, ЗК > 0)? Выберите правильный ответ:

1) возрастет;
2) снизится;
3) не изменится;
4) для ответа требуются дополнительные сведения.

11. *NPV* денежного потока по проекту положительна при ставке дисконтирования *i*, равной проценту по заемному капиталу. Применяемая кредитная ставка меньше, чем ставка сравнения *i*. Это означает, что:

1) *NPV* денежного потока по акционерному (собственному) капиталу меньше *NPV* денежных потоков по проекту;
2) *NPV* денежного потока по акционерному (собственному) капиталу больше *NPV* денежных потоков по проекту;
3) *IRR* денежного потока по акционерному (собственному) капиталу больше *IRR* денежного потока по проекту;
4) *IRR* денежного потока по акционерному (собственному) капиталу меньше *IRR* денежного потока по проекту.

12. Имеется два инвестиционных проекта на 4 года с объемом первоначальных инвестиций 1000 тыс. руб. каждый. Распределение чистых доходов, тыс. руб., от проектов по годам выглядит следующим образом.

Проект	Год			
	1-й	2-й	3-й	4-й
А	500	500	500	506
Б	100	300	500	1100

Какой из проектов выгоднее для инвестора:

1) проект А;
2) проект Б;
3) одинаковы.

13. Анализируемый по ставке сравнения *i* проект имеет нулевую оценку чистого дисконтированного дохода (*NPV*= 0). В этом случае:

1) внутренняя норма доходности больше, чем ставка сравнения (*IRR* >*i*);
2) ставка сравнения и внутренняя норма доходности одинаковы;
3) проект не окупится;
4) длительность проекта превышает срок его окупаемости;
5) индекс рентабельности проекта равен единице;
6) проект следует отвергнуть;
7) для принятия решения об инвестировании в проект нужна дополнительная информация.

14. Компания «Домстрой» собирается вложить 15,552 млн. долл. в строительство жилого дома. У нее имеются два проекта: А и Б. По проекту А дом строится в две очереди: первая очередь даст I за 1-й год 10 млн. долл. дохода. В течение 2-го года строится вторая очередь, затраты на которую равны доходам от первой очереди. В 3-м году инвестор получит 10 млн. долл. дохода. По проекту Б сразу строятся обе очереди дома и доход инвестор получит к только в 3-м году в размере 22,1 млн. долл. Как зависит выбор варианта от применяемой ставки дисконтирования r= 5% или r = 10% и используемых оценок: *NPV и IRR*.
   1) при значении r= 5% компании следует предпочесть проект Б;
   2) при значении r = 10% следует выбрать А;
   3) проект А выгоднее Б независимо от ставки r = 5% или r =10%
   4) при значении r = 10% выбор не зависит от используемого критерия;
   4) при значении r = 5% проект А доминирует по обоим критериям;
   5) при значении r = 10% оценки NPV и IRR. Согласованны.
15. Оценить уровень эффективности проекта с двухлетним сроком реализации, если инвестиционные затраты составляют 590 тыс. руб., дисконтная ставка - 10%, величина чистого денежного потока за 1-й год — 220 тыс. руб., за 2-й год — 484 тыс. руб.:
   1) убыточный проект;
   2) проект с низким уровнем эффективности;
   3) проект с высоким уровнем эффективности.
16. Допустим, что начало реализации проекта «депозитного типа» откладывается на 1 год. Как изменятся его характеристики *NPV, IRR* и рентабельности *(Р)*, оцениваемые по отношению к текущей дате:
   1) не изменятся;
   2) уменьшатся;
   3) *NPV, IRR* уменьшатся, рентабельность возрастет;
   4) *NPV* станет меньше, *IRR* и рентабельность не изменятся.

10. *Ценные бумаги*

1. Ставка процента выросла с 8 до 10%. Держатель ценной бессрочной бумаги, которая приносит ему годовой доход в 100 ден. ед. постоянно, будет иметь:
   1) потери капитала в 40 ден. ед.;
   2) потери капитала в 50 ден. ед.;
   3) доход от прироста капитала в 50 ден. ед.;
   4) потери капитала в 250 ден. ед.;
   5) доход от прироста капитала в 250 ден. ед.
2. Ставка процента по облигациям будет тем ниже, чем:
   1) короче срок, на который они выпущены;
   2) больше возможный риск;
   3) ниже ликвидность;
   4) больше ожидаемая инфляция;
   5) больше номинальная цена по отношению к рыночной.
3. Субъект направляет свои деньги на приобретение государственных ценных бумаг лишь в случае, если:
   1) процентные ставки скоро вырастут;
   2) процентные ставки значительно сократятся;
   3) процентные ставки сначала вырастут, а затем снизятся;
   4) будет наблюдаться инфляционный рост цен;
   5) ни один из ответов не верен.
4. Цена на колл-опцион становится тем меньше, чем при про чих равных:
   1) выше цена базисной акции;
   2) выше цена исполнения;
   3) выше без рисковая ставка процента;
   4) больше времени до даты истечения;
   5) ниже риск базисной акции.
5. Какому направлению вложений присуще свойство финансового рычага:
   1) вложениям в акции;
   2) вложениям в валютные фьючерсы;
   3) капиталовложениям с частичным заимствованием;
   4) вложениям в облигации;
   5) вложениям в опционы?
6. Ожидается, что компания *А* выплатит своим акционерам дивидендный доход в размере 10 долл. на акцию, после чего ее акции будут продаваться по курсу 120 долл. Каков ориентировочный текущий курс акции компании, если ставка рыночной капитализации равна 10%?
   1) 118,18;
   2) 100;
   3) 109,09;
   4) все ответы неверны.

7. АО выпустило 900 простых акций и 100 привилегированных, а также 150 облигаций. Номинал у каждой бумаги один и тот же - 1 тыс. руб. Процент по облигациям составляет 12%, а ставка дивиденда по привилегированным акциям — 15%. Требуется разместить держателей различных ценных бумаг в порядке уменьшения их дохода, если прибыль к распределению между акционерами составила 159 тыс. руб.:
   1) владелец привилегированной акции; владелец облигации, владелец обыкновенной акции;
   2) владелец обыкновенной акции, владелец привилегированной акции, владелец облигации;
   3) владелец привилегированной акции, владелец обыкновенной акции, владелец облигации.
8. За прошедший год фирма выплатила дивиденды в размере 12 руб. на акцию. Прогнозируется, что в обозримом будущем дивиденды по акциям этой фирмы будут ежегодно увеличиваться на 4%. В настоящее время требуемая ставка доходности для подобных инвестиций равна 11%. При текущем курсе акции 240 руб.:
   1) внутренняя ставка доходности акций составляет 9,2%;
   2) внутренняя ставка доходности акций составляет 5%;
   3) внутренняя ставка доходности акций составляет 9%;
   4) акции переоценены;
   5) акции следует покупать.

9. АО выпускает облигации с купонной ставкой g, сроком погашения T лет и продает их на первичном рынке по номиналу N. Если годовой темп инфляции r, то как надо скорректировать купонные ставки g, чтобы реальная доходность первичного вложения осталась прежней, т.е. равной g?
   1) $g1=g(1+r)'$, $t=1,2,\dots,T$
   2) $g1=g+r$
   3) корректировать следует не купонные ставки, а объем погашения: $N_{скор} = N(1+r)'$
   4) $g1=g+r+gr$

10. Господин Петров всем видам вложений предпочитает краткосрочные облигации: покупает, хранит их до срока погашения, а затем реинвестирует поступившие средства. В официальных источниках годовая доходность подобных облигаций рассчитывается по правилу простой ставки. На данный момент у Петрова имеются две возможности: трехмесячные облигации с доходностью 24% или шестимесячные, у которых доходность равна 24,5%. Какие облигации выгоднее:
    1) трехмесячные;
    2) шестимесячные;
    3) никакой разницы, доход за год будет одинаков;

4) исходной информации недостаточно.

11. Инвестор может воспользоваться двумя различными выпусками бескупонных облигаций *А и В с* периодами созревания 1 год и 3 года. Действующие рыночные цены этих облигаций таковы, что их эффективные доходности одинаковы. Предположим, что инвестор желает вложить деньги сроком на 2 года. Эксперты прогнозируют устойчивое снижение процентной ставки, которое сохранится, по крайней мере, до конца трехлетнего срока. При такой тенденции инвестору следует:
    1) диверсифицировать вклад по вложениям в бумаги А и В;
    2) двукратно последовательно вложить деньги в облигации А: купить, погасить и снова купить и держать до погашения;
    3) купить облигации В, продать их через год и реинвестировать вырученные деньги в облигации А;
    4) инвестировать в облигации В с последующей продажей через 2 года.
12. Продажа опциона означает, что обязательства по его исполнению несет:
    1) продавец опциона;
    2) покупатель опциона;
    3) иное лицо.
13. Опцион, право по которому может быть реализовано в любое время от момента его выпуска до даты исполнения, называется:
    1)европейским;
    2) американским;
    3) имеет другое название.
14. Доходы предприятия, полученные в виде дивидендов по акции, облагаются налогом по ставке 15%, а доходы граждан, полученные по государственным ценным бумагам, налогом не облагаются. Предприятие *А* приобретает 10 привилегированных акций номиналом 10 тыс. руб., которые приносят 25% годовых. Физическое лицо *В* приобретает 100 государственных облигаций номиналом 1 тыс. руб., приносящих 20% годовых. Кто из инвесторов получит больший годовой доход с учетом налогообложения доходов, если ставка подоходного налога для физического лица равна 13%?
    1) доходы инвесторов равны;
    2) инвестор *А;*
    3) инвестор *В.*
15. Оцените справедливость утверждения: «Доходность вложений в ценные бумаги тем выше, чем выше надежность этих ценных бумаг»:
    1) справедливо;
    2) несправедливо;
    3) справедливо только для акций;
    4) справедливо только для долговых обязательств;
    5) справедливо только при определенных условиях.

16. По облигации сроком обращения 1 год выплачивается купонный доход в размере 4%. Рыночная стоимость облигации -
92% от номинала. При какой процентной ставке текущая стоимость облигации будет равна ее рыночной стоимости?
   1)12%;
   2) 13%;
   3)14%;
   4) задание сформулировано некорректно;
   5) нет правильного ответа.
17. Проценты по долгосрочным облигациям компании АБВ выплачиваются один раз в год - в январе. Если предположить, что ситуация на фондовом рынке остается стабильной, как будут соотноситься курсовые цены на эти облигации в марте и ноябре?
   1) цены будут равны;
   2) мартовская цена выше ноябрьской;
   3) ноябрьская цена выше мартовской.
18. АО выпускает облигации с купонной ставкой 8,5% и про дает их на первичном рынке по номиналу. Двумя годами ранее то же АО выпустило долговые обязательства с купонной ставкой 8%. Определить, какое из следующих утверждений справедливо в отношении 8%-х бумаг:
   . 1) их текущая рыночная цена выше номинала;
   2) их текущая рыночная цена ниже номинала;
   3) их рыночная цена равна номиналу;
   4) задание сформулировано некорректно.
19. Допустим, торговля ценными бумагами на фондовой бирже ведется по принципу организации «залпового рынка», т.е. путем единовременного сопоставления всех приказов на покупку и на продажу. Что, применительно к этой схеме организации торговли, представляет собой курс ценной бумаги, фиксируемый биржей?
   1) цену, позволяющую реализовать наибольшее число приказов относительно купли ценных бумаг по минимальной цене;
   2) цену, позволяющую реализовать наибольшее число приказов относительно продажи ценных бумаг по максимальной цене;
   3)цену, позволяющую максимизировать количество проданных и купленных ценных бумаг;
   4)цену, позволяющую максимизировать число совершенных сделок.
20. Облигация со сроком погашения через 2 года погашается по номиналу. По облигации выплачивается ежегодный купонный
Доход в размере 10% от номинала. Рыночная цена облигации составляет 91,87% от номинальной стоимости . Найти внутреннюю ставку доходности:

   1)10%

2)15%

3)15,31%

4)задание сформулировано некорректно.

21.Облигация со сроком погашения через год и годовой купонной ставкой 10% продается по курсу 75%. Какова ее доходность к погашению?

1)33,33%

2)10%

3)46,67%

4)нет правильного ответа

Литература

[1] А. Бахвалов, В. Бахвалова, А. Идельсон «Финансовые вычисления для профессионалов». Настольная книга финансиста и менеджера. СПб, 2001

[2] Н.В. Коптева, С.П. Семенов «Финансовая математика». Учебное пособие. Издательство Алтайского госуниверситета, 2003

[3] Е.В. Ширшов, Н.И. Петрик, А.Г. Тутыгин, Г.В. Серов «Финансовая математика». Учебное пособие. М.- КНОРУС, 2006

[4] Е.М. Четыркин «Финансовая математика». М.- Издательство «Дело», 2006

[5] Е.М. Четыркин, Н.Е. Васильева «Финансово-экономические расчеты». М.- «Финансы и статистика», 1990

[6] В.В. Капитоненко «Финансовая математика и ее приложения». Учебно-практическое пособие. М.- , 1999

[7] В.В. Ковалев «Методы оценки инвестиционных проектов». М.- «Финансы и статистика», 1999

[8] В.А. Марошкин, А.Л. Ломакин «Практикум по финансовому менеджменту: технология финансовых расчетов с процентами». М.- «Финансы и статистика», 2004

[9] И.Т. Балабанов «Сборник задач по финансам и финансовому менеджменту». М.- «Финансы и статистика», 2000

[10] Т.В. Ващенко «Математика финансового менеджмента». М.- «Перспектива», 1996

[11] Е.А. Ендовицкий, Л.С. Коробейников, Е.С. Сысоева «Практикум по инвестиционному анализу». М.- «Финансы и статистика», 2001

[12] В.А. Марошкин, С.В. Марошкина «Простые и сложные проценты». Учебной пособие. М.- Акалис, 1996

[13] В.А. Марошкин, С.В. Марошкина «Технология финансово-экономических расчетов с процентами». Учебной пособие. М.- ЦИПК авиационной промышленности, 1996

[14] В.Е. Черкасов «Практическое руководство по финансово-экономическим расчетам». М.- «Мета-информ», АЛ «Консальт-банкир», 1995